電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙１　（解答例）

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

［１］

(1)

$$\cos\frac{t}{4}\cdot\sin\frac{t}{3}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)t-\sin\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)t\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7}{12}\right)t-\sin\left(-\frac{1}{12}\right)t\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7}{12}\right)t+\sin\left(\frac{1}{12}\right)t\right)$$

$\sin\left(\frac{7}{12}\right)t$ の周期は $\frac{24}{7}\pi$，$\sin\left(\frac{1}{12}\right)t$ の周期は 24π，よって基本周期は 24π

(2)

$$\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=0+j\times 1=j$$

(3)

$$\left(\sqrt{3}-j\right)^2=\left\{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2=\left\{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right\}^2=\left\{2e^{-j\frac{\pi}{6}}\right\}^2=4e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

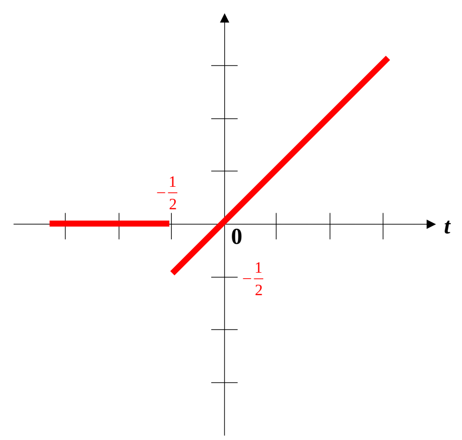
(4)

$$f(t)=\mathrm{Re}\left[e^{j3\omega t}+e^{j\left(3\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{j\left(3\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}\right]=\mathrm{Re}\left[e^{j3\omega t}\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=\left(1+\sqrt{2}\right)\cos(3\omega t)$$

(5) デルタ関数の性質　$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ と $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ を利用して、

$$\left(t^2+1\right)\delta(3t)=\left(t^2+1\right)\frac{1}{3}\delta(t)=\left(0^2+1\right)\frac{1}{3}\delta(t)=\frac{1}{3}\delta(t)\cancel{=\frac{1}{4}\delta(t-3)}$$

(6)



［２］

(1)

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left[t^2\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\left(\pi^2-(-\pi)^2\right)=0$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}te^{-jn1t}dt=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[t\frac{1}{-jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-jn}e^{-jnt}dt\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{-jn}\left(\pi e^{-jn\pi}+\pi e^{jn\pi}\right)+\frac{1}{jn}\left[\frac{1}{-jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{-jn}\left(e^{-jn\pi}+e^{jn\pi}\right)+\frac{1}{n^2}\left(e^{-jn\pi}-e^{jn\pi}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{-jn}\left(e^{-jn\pi}+e^{jn\pi}\right)-\frac{1}{n^2}\left(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{-jn}\left(2\cos n\pi\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{-jn}2(-1)^n\right\}=-\frac{1}{jn}(-1)^n=\frac{j}{n}(-1)^n$$

よって、$e(t)=\sum_{n=-\infty(n\neq 0)}^{\infty}\frac{j}{n}(-1)^n\cdot e^{jnt}=j2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\cdot e^{jnt}\right]$

(2)

RL 回路のアドミタンスは $Y(n\omega_0)=\frac{1}{R+j(n\omega_0)L}=\left|\frac{1}{R+j(n\omega_0)L}\right|e^{j\theta}$ で表わされる。

ここで，振幅スペクトルは、$\left|\frac{1}{R+j(n\omega_0)L}\right|=\frac{1}{\sqrt{R^2+(n\omega_0 L)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

(3)

また、位相スペクトルは　$\theta=-\tan^{-1}\left(\frac{n\omega_0 L}{R}\right)=-\tan^{-1}n$　より，$e^{j\theta}=\exp\left(-j\tan^{-1}n\right)$

(4)

(2)(3)の結果より、アドミタンスは $Y(n\omega_0)=\frac{\exp\left(-j\tan^{-1}n\right)}{\sqrt{1+n^2}}$

これと(1)の結果より、$i(t)=j2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp(jnt)}{n}\cdot\frac{\exp\left(-j\tan^{-1}n\right)}{\sqrt{1+n^2}}\right]$

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙２　（解答例）

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

［３］

(1)　$f(at)$ のフーリエ変換は $\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ の性質を用いると、

$f(t)=\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right]$ のフーリエ変換は $F(\omega)=|a|\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\dfrac{a\omega}{2}\right)^2\right]$ となる。したがって、

$$F_1(\omega)=3\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]$$

(2)　$\exp\left[-\left(\dfrac{T_1}{2\times 3}\right)^2\right]=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore T_1=6\sqrt{\mathrm{l\;n}}$

(3)　$F_2(\omega)=4\sqrt{\pi}\exp\left[-(2\omega)^2\right]$

(4)

$$P(\omega)=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)=3\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]4\sqrt{\pi}\exp\left[-(2\omega)^2\right]$$

$$=12\pi\exp\left[-\left(\frac{5\omega}{2}\right)^2\right]$$

(5)

$P(\omega)$ のフーリエ逆変換をもとめればよいので、

$$p(t)=\frac{12}{5}\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{t}{5}\right)^2\right]$$

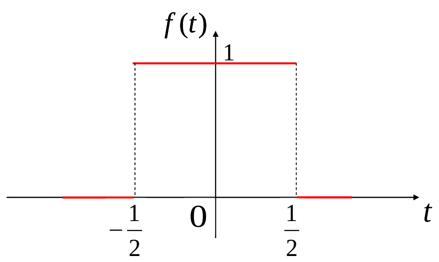
(6)　$T_2=8\sqrt{\ln 2}$　　また(5)より、$T_p=10\sqrt{\ln 2}$　したがって、$T_p=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ が成りたっている。

(7)　$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の FWHM の和の 1/2 となるから、

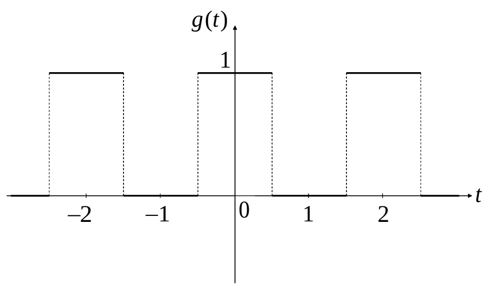
$$\frac{1}{2}(T_1+T_2)=7\sqrt{\ln 2}$$

［４］

(1)



(2)

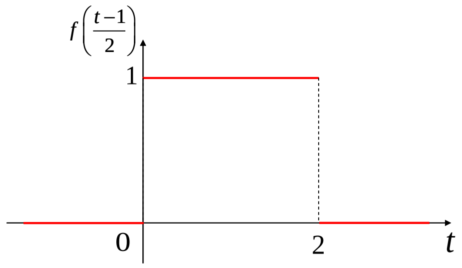


(3)

$$G(\omega)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)+e^{-j2\omega}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)+e^{+j2\omega}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

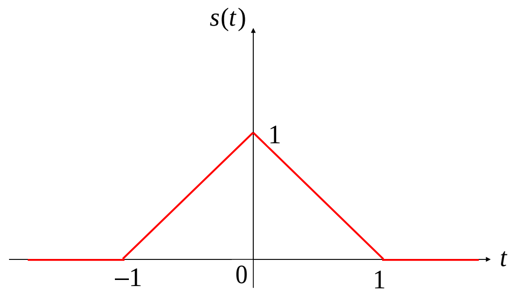
$$=(1+2\cos 2\omega)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(4)　$-1/2<(t-1)/2<1/2$ で 1 だから、$0<t<2$ で 1



(5)　$2e^{-j\omega}\,\mathrm{sinc}(\omega)$

(6)

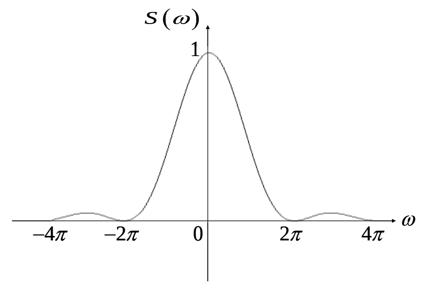


(7)　偶関数なので

$$S(\omega)=2\int_0^1(-t+1)\cos\omega t\,dt=2\left[(-t+1)\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^1-2\int_0^1-\frac{\sin\omega t}{\omega}dt=\frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

$$=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(8)



(9)

自己相関関数のフーリエ変換は、基の関数のエネルギースペクトルに等しいので、

$$\mathcal{F}[R(\tau)]=\left|\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]\right|^2=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(10)

前問より、自己相関関数のフーリエ変換は $S(\omega)$ に等しいことがわかる。したがって、

自己相関関数は $s(t)$ と同じ関数形のはずなので、

$$R(\tau)=(1-|\tau|)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

（別解）　$\mathrm{rect}(t)\otimes\mathrm{rect}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(t)\,\mathrm{rect}(t-\tau)\,dt$ を計算する。これより、

$$\mathrm{rect}(t)\otimes\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1-|\tau| & (|\tau|<1)\\ 0 & (|\tau|>1)\end{cases}$$

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙３　（解答例）

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

［５］

(1)

$$x(t)=h(t)*e^{j\omega_0 t}=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{j\omega_0(t-x)}dx=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-j\omega_0 x}dx=H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

(2)

$$(j\omega)^2 X(\omega)+j\omega X(\omega)+X(\omega)=F(\omega)\quad or\quad \left[\left(1-\omega^2\right)+j\omega\right]X(\omega)=F(\omega)$$

(3)

$$H(\omega)=\frac{X(\omega)}{F(\omega)}=\frac{1}{\left(1-\omega^2\right)+j\omega}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}}e^{j\theta(\omega)}$$

ここで，$\theta(\omega)=-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{1-\omega^2}$

(4)

$f(t)=e^{j3\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}$とおいて、上式に代入すると

$$x_c(t)=H(3\omega_0)e^{j3\omega_0 t}+H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-9{\omega_0}^2\right)^2+9{\omega_0}^2}}e^{j(3\omega_0 t+\theta_1)}+\frac{1}{\sqrt{\left(1-{\omega_0}^2\right)^2+{\omega_0}^2}}e^{j(\omega_0 t+\theta_2)}$$

ここで，$\theta_1=\theta(3\omega_0)=-\tan^{-1}\dfrac{3\omega_0}{1-9{\omega_0}^2}$，　$\theta_2=\theta(\omega_0)=-\tan^{-1}\dfrac{\omega_0}{1-{\omega_0}^2}$

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[x_c(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{\left(1-9{\omega_0}^2\right)^2+9{\omega_0}^2}}\cos(3\omega_0 t+\theta_1)+\frac{1}{\sqrt{\left(1-{\omega_0}^2\right)^2+{\omega_0}^2}}\cos(\omega_0 t+\theta_2)$$

［６］

(1)

$$sX(s)-x(+0)+X(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$sX(s)+X(s)-1=\frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)X(s)=\frac{1}{s^2}+1=\frac{s^2+1}{s^2}$$

$$X(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}$$

(2)

$$X(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+1}$$

$$A=s^2X(s)\Big|_{s=0}=1$$

$s^2X(s)$を微分すると$\left(s^2X(s)\right)'=\dfrac{2s(s+1)-\left(s^2+1\right)}{(s+1)^2}=B+C\dfrac{2s(s+1)-s^2}{(s+1)^2}$

$$B=\left(s^2X(s)\right)'\Big|_{s=0}=-1$$

$$C=(s+1)X(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s^2+1}{s^2}\Big|_{s=-1}=2$$

$$\therefore\quad X(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1}$$

(3)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]=\left(t-1+2e^{-t}\right)u(t)$$