電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　（2010.8.3）

E1：黒川　　E2: 西舘・岩井

解答にあたっては、途中の導出過程も示すこと。またグラフを描く場合は、横軸、縦軸と曲線の交わる点などの値を記入すること。以下において、$u(t)$ は単位階段関数、$\delta(t)$ はデルタ関数、$\mathrm{rect}(t)$ は矩形関数である。問題の最後（裏面）にヒントがあるので、必要に応じて参考にしてよい。

［1］　次の問に答えよ。(12 点)

(1)　$f(t)=\sin 3t\cos 2t$ の基本周期を求めよ。　(2)　$\exp\left(j\dfrac{2}{3}\pi\right)$ を直交形式に直せ。

(3)　$1+j\sqrt{3}$ を指数関数形式に直せ。　(4)　複素表示を用いて $f(t)=\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の計算をせよ。

(5)　デルタ関数の性質を利用して、$\delta(t-3)/(t+1)$ を簡単にせよ。　(6)　$(t+2)u(t+2)$ をグラフに書け。

［2］　次の周期関数 $f(t)$ について以下の問に答えよ。(13 点)

$$f(t)=\begin{cases}0 & (-\pi<t\le 0)\\ 2t & (0<t\le\pi)\end{cases}\quad \text{ただし、}\ f(t)=f(t+2n\pi)\quad n\text{: 整数}$$

(1)　$f(t)\quad(-3\pi<t\le 3\pi)$　をグラフに書け。

(2)　三角フーリエ係数 a_0 を求めよ。

(3)　三角フーリエ係数 a_n を求めよ。

(4)　三角フーリエ係数 b_n を求めよ。

(5)　$f(t)$ を三角フーリエ級数で表せ。

［3］　$f(t)=\exp(-|t|)$ とする。(15 点)

(1)　$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。

(2)　次の定積分を計算せよ。$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2|t|)dt$

(3)　前記の関数 $f(t)$ とそのフーリエ変換 $F(\omega)$ に対してパーシバルの定理を適用し、次の積分値

$$K=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+1)^2}$$ の値を求めよ。

(4)　$g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ としたとき、$g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めよ。

［4］　$f(t)=\exp(-t^2)$ について、次の問いに答えよ。(15 点)

(1)　$f(t)$ の半値幅（FWHM）を求めよ。

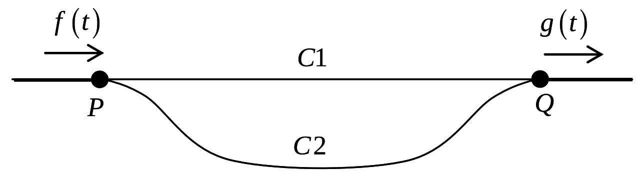
(2)　$f(t)$ の自己相関関数 $R(\tau)$ は次のように書ける。次の式の $\boxed{ア}$ の中に入る式を求めよ。

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{ア}\,dt \qquad ①$$

(3)　前問の式①の積分を計算し、$R(\tau)$ の値を求めよ。必要なら、次の定積分の式を参考にせよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

［5］　導線が点 P で 2 本に分かれ、さらにまた点 Q で 1 本に合流している。点 P の直前の信号波形を $f(t)$ とする。点 P において、信号 $f(t)$ はその大きさが 2 等分されて 2 つの経路に伝搬し、それぞれの経路を伝搬する間に波形は変わらないとする。点 Q で合流した直後において、経路 C1 から来る信号を $f_1(t)$、経路 C2 から来る信号を $f_2(t)$ とする。点 Q で合流した直後の全信号 $g(t)$ は、それぞれの経路からきた信号の和になるとする。すなわち、$g(t)=f_1(t)+f_2(t)$ である。ただし、経路 C1 の伝搬時間は τ、経路 C2 の伝搬時間は 2τ とする。このとき、次の問いに答えよ。(15 点)



(1)　点 Q で合流した直後の全信号 $g(t)$ を、$f(t)$ を用いて表せ。

(2)　$f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とする。$g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を、$F(\omega)$ を用いて表せ。

(3)　$f(t)$ を入力、$g(t)$ を出力と考えたとき、この伝搬系のシステム伝達関数 $H(\omega)$ の絶対値を求めよ。

［6］　線形システムにインパルスを入力したところ、そのインパルス応答は $h(t)=e^{-t}u(t)$ となった。以下の問いに答えよ。(20 点)

(1)　$t>0$ で一定値 2 をこのシステムに入力し続けたときの出力 $g(t)$ を、コンボリューションを用いて求めよ。

(2)　このシステムのシステム伝達関数 $H(\omega)$ を求めよ。ただし、解は、$|H(\omega)|e^{j\theta}$ の形式で示すこと。

(3)　$f(t)=e^{j2t}$ がこのシステムに入力されたときの出力 $g(t)$ を求めよ。ただし、解は指数関数の形式で示すこと。

(4)　$f(t)=2\cos(3t)$ がこのシステムに入力されたときの出力 $g(t)$ を求めよ。ただし、解は、三角関数を含む形式で示すこと。

［7］　1 階常微分方程式 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}-4\dfrac{dy(t)}{dt}+4y(t)=e^{-t}u(t)$ について以下の問に答えよ。

ただし，$y(t)$ の初期値は，$y'(0_+)=1$，$y(0_+)=1$ とする。(10 点)

(1)　$y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ とするとき，微分方程式をラプラス変換して $Y(s)$ を求めよ。

(2)　$Y(s)$ を部分分数に展開せよ。

(3)　微分方程式の解 $y(t)$ を求めよ。

ヒント：

- 三角フーリエ級数の公式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\},\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

- フーリエ変換の公式　$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$
- フーリエ逆変換の公式　$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$
- $\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)]=\frac{1}{\alpha+j\omega}$　（$\alpha>0$）
- $\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]=F(\omega)e^{-jt_0\omega}$
- $\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]=F(\omega-\omega_0)$
- $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$
- $\mathcal{F}\left[f(at)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- $\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega F(\omega)$
- $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
- $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$
- $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
- デルタ関数列　$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$
- $\mathcal{F}\left[\delta_T(t)\right]=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
- 信号 $\mathrm{f}(t)$　と $\mathrm{g}(t)$　のコンボリューションは $\mathrm{f}(t)*\mathrm{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(t-x)dx$
- パーシバルの定理　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$
- 相関関数の定義　$f_1(t)$、$f_2(t)$ が実関数のとき　$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\,f_2(t-\tau)\,dt$
- ラプラス変換の定義　$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$
- $\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$
- 微分のラプラス変換　$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=sF(s)-f(0_+)$
- 初期値定理　$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0_+)$
- 最終値定理　$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$
- シフト定理　$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s)$　$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=f(s+a)$
- コンボリューション $\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$

電気数学IIおよび演習　期末テスト　解答用紙１　（解答例）

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

[1]

(1)

$\sin 3t\cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t)$　$\sin 5t$ の周期は $2\pi/5$、$\sin t$ の周期は 2π、よって基本周期は 2π

(2)

$$\exp\left(j\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

$$1 + j\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

(4)

$$f(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) + e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)\right]$$

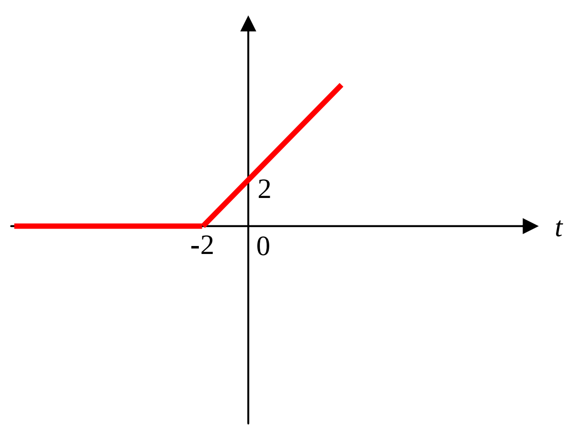
$$= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\left(e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\left\{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right] = \cos\omega t$$

(5) $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$ を利用して、

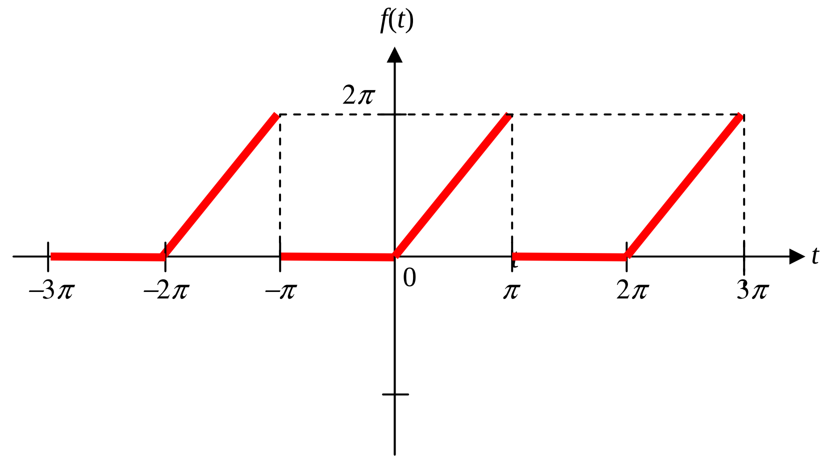
$$\frac{1}{4}\delta(t - 3)$$

(6)



[2]

(1)



(2) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{\pi} 2t\cdot dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[t^2\right]_0^{\pi} = \pi$

(3)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\left[t\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = 2\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\right\}$$

(4)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{n}\left[t\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}\left[\sin(n\pi)\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

(5)

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{3^2} + \frac{\cos(5t)}{5^2} + \cdots\right) + 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \cdots\right)$$

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙２　（解答例）

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

[3]

(1)

$$F(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{1-j\omega}=\frac{2}{\omega^2+1}$$

(2)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2|t|)\,dt=2\int_{0}^{\infty}\exp(-2t)\,dt=\left[e^{-2t}\right]_{\infty}^{0}=1$$

(3) パーシバルの定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-|t|}\right|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\omega^2+1}\right)^2 d\omega$$　　したがって、

$$K=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+1\right)^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}dt=\frac{\pi}{2}$$

(4)

$$\mathcal{F}\left[\exp(-|t|)\right]=\frac{2}{\omega^2+1}$$

$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$ より、　$\mathcal{F}\left[\frac{2}{t^2+1}\right]=2\pi\exp(-|\omega|)$

したがって、$g(t)=\frac{1}{t^2+1}$ としたとき、$G(\omega)=\pi\exp(-|\omega|)$

[4]

(1) $2\sqrt{\log_e 2}$

(2) $\exp(-t^2)\exp\left\{-(t-\tau)^2\right\}$

(3)

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\exp\left\{-(t-\tau)^2\right\}dt=\exp(-\tau^2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-2t^2+2t\tau\right)dt$$

$$=\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2\right\}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)$$

[5]

(1) $g(t)=\frac{1}{2}\left[f(t-\tau)+f(t-2\tau)\right]$

(2)

$$G(\omega)=\frac{1}{2}\left[F(\omega)e^{-j\tau\omega}+F(\omega)e^{-j2\tau\omega}\right]$$

$$=\frac{F(\omega)}{2}\left[e^{-j\tau\omega}+e^{-j2\tau\omega}\right]$$

(3)

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\left[e^{-j\tau\omega}+e^{-j2\tau\omega}\right]$$

$$=\frac{e^{-j\frac{3\tau\omega}{2}}}{2}\left(e^{j\frac{\tau\omega}{2}}+e^{-j\frac{\tau\omega}{2}}\right)=e^{-j\frac{3\tau\omega}{2}}\cos\frac{\tau\omega}{2}$$

したがって、

$$|H(\omega)|=\left|e^{-j\frac{3\tau\omega}{2}}\cos\frac{\tau\omega}{2}\right|$$

$$=\left|\cos\frac{\tau\omega}{2}\right|$$

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[6]

(1)

入力： $f(t)=2u(t)$

出力： $g(t)=h(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-x}u(x)\right]2u(t-x)\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-x}u(t-x)dx$

$$u(t-x)=\begin{cases}1 & t-x>0\Rightarrow x<t\\ 0 & t-x<0\Rightarrow x>t\end{cases}$$

$t<0$ のとき $g(t)=0$ より，$g(t)$ は $t>0$ で値をもつので

$$g(t)=2\int_0^t e^{-x}dx\,u(t)=2\left[-e^{-x}\right]_0^t u(t)=2\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

(2)

インパルス応答をフーリエ変換すると

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\left[-\frac{1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{1+j\omega}=\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{-j\tan^{-1}(\omega/1)}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{j\theta}$$

ただし，　$\theta=-\tan^{-1}(\omega)$

(3)

$$g(t)=H(2)e^{j2t}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}e^{j\theta}e^{j2t}=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{j(2t+\theta)}$$　ここで，$\theta=-\tan^{-1}(2)$

または

$$g(t)=H(2)e^{j2t}=\frac{1}{1+j2}e^{j2t}=\frac{1-j2}{1+4}=\frac{\sqrt{5}e^{-j\tan^{-1}(2/1)}}{5}e^{j2t}=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{j(2t+\theta)}$$

ここで，　$\theta=-\tan^{-1}(2)$

(4)

$f(t)=2\cos(3t)=e^{j3t}+e^{-j3t}$

線形システムであるから，出力は個々の入力に対する出力の和になるので，

$$g(t)=H(3)e^{j3t}+H(-3)e^{-j3t}=\frac{1}{\sqrt{1+9}}e^{-j\tan^{-j}(3)}e^{j3t}+\frac{1}{\sqrt{1+9}}e^{j\tan^{-1}(3)}e^{-j3t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\left[e^{j\left(3t-\tan^{-1}(3)\right)}+e^{-j\left(3t-\tan^{-1}(3)\right)}\right]=\frac{2}{\sqrt{10}}\cos\left(3t-\tan^{-1(3)}\right)=\frac{2}{\sqrt{10}}\cos(3t+\theta)$$

ここで，　$\theta=-\tan^{-1}(3)$

【別解】

$f(t)=2\cos(3t)=e^{j3t}+e^{-j3t}$

線形システムであるから，出力は個々の入力に対する出力の和になるので，

$$g(t)=H(3)e^{j3t}+H(-3)e^{-j3t}=\frac{1}{1+j3}e^{j3t}+\frac{1}{1-j3}e^{-j3t}=\frac{1-j3}{10}e^{j3t}+\frac{1+j3}{10}e^{-j3t}$$

$$=\frac{e^{-j\tan^{-1}(3/1)}}{\sqrt{10}}e^{j3t}+\frac{e^{j\tan^{-1}(3/1)}}{\sqrt{10}}e^{-j3t}=\frac{1}{\sqrt{10}}\left[e^{j(3t+\theta)}+e^{-j(3t+\theta)}\right]=\frac{2}{\sqrt{10}}\cos(3t+\theta)$$

ここで，　$\theta=-\tan^{-1}(3)$

[7]

(1)

$$s^2Y(s)-s-1-4sY(s)+4+4Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\left(s^2-4s+4\right)Y(s)=\frac{1}{s+1}+s-3=\frac{s^2-2s-2}{s+1}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}+\frac{s-3}{(s-2)^2}=\frac{s^2-2s-2}{(s+1)(s-2)^2}$$

(2)

$$Y(s)=\frac{s^2-2s-2}{(s+1)(s-2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-2}$$

$$A=(s+1)Y(s)\Big|_{s=-1}=\left.\frac{s^2-2s-2}{(s-2)^2}\right|_{s=-1}=\frac{1}{9}$$

$$B=(s-2)^2Y(s)\Big|_{s=2}=\left.\frac{s^2-2s-2}{(s+1)}\right|_{s=2}=-\frac{2}{3}$$

$$C=\left.(s-2)Y(s)+\frac{2}{3(s-2)}\right|_{s=2}$$

$$=\left.\frac{s^2-2s-1}{(s+1)(s-2)}+\frac{2}{3(s-2)}\right|_{s=2}$$

$$=\left.\frac{3s^2-4s-4}{3(s+1)(s-2)}\right|_{s=2}$$

$$=\left.\frac{(3s+2)(s-2)}{3(s+1)(s-2)}\right|_{s=2}$$

$$=\frac{8}{9}$$

$$Y(s)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{s-2}$$

(3)

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\left(\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{2}{3}te^{2t}+\frac{8}{9}e^{2t}\right)u(t)$$