電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙１

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

［１］

(1)

12π

(2)

$$2\exp\left(j\frac{5}{6}\right)=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+j\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\sqrt{3}+j$$

(3)

$$\left(1-j\sqrt{3}\right)^3=\left\{2\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$
$$=\left\{2\exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right)\right\}^3$$
$$=8\exp\left(-j\pi\right)$$

(4)

$$f(t)=30\cos\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{d}{dt}\left(2\cos 15t\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left[30\cos\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(2\cos 15t\right)\right]=\mathrm{Re}\left[30e^{j\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)}\right]+\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(2e^{j15t}\right)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[30e^{j\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{d}{dt}\left(2e^{j15t}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[30e^{j\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)}+j15\times 2e^{j15t}\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[30e^{j15t}\left(e^{j\frac{\pi}{6}}+j\right)\right]=\mathrm{Re}\left[30e^{j15t}\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}+j\right)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[30e^{j15t}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{3}{2}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[30e^{j15t}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[30e^{j15t}\left(\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\right]$$
$$=30\sqrt{3}\cos\left(15t+\frac{\pi}{3}\right)$$

［２］

(1)

偶関数

(2)

$$a_0=2\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{2t}{T}\right)dt$$
$$=\frac{4}{T}\left[t-\frac{1}{T}t^2\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{4}{T}\left[\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{T}\frac{T^2}{4}\right)-0\right]$$
$$=\frac{4}{T}\cdot\frac{T}{4}=1$$

(3)

$$a_n=2\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{2t}{T}\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt$$
$$=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(n\omega_0 t\right)dt-\frac{8}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cos\left(n\omega_0 t\right)dt$$
$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$\cos n\pi=\left(-1\right)^n$ より

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi^2}\left\{1-\left(-1\right)^n\right\}\begin{cases}0 & (n:\text{偶数})\\ \dfrac{4}{n^2\pi^2} & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

(4)

$b_n=0$　（$f(t)$は偶関数ゆえ）

(5)

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega_0 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega_0 t+\cdots\right)$$

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙２

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

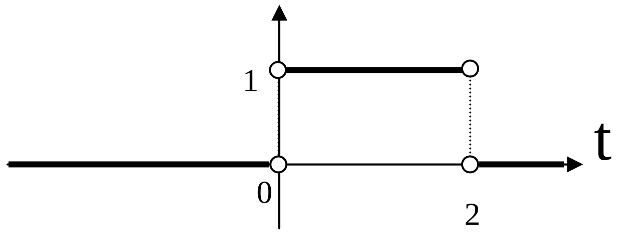
［３］

(1) $1+j\omega$

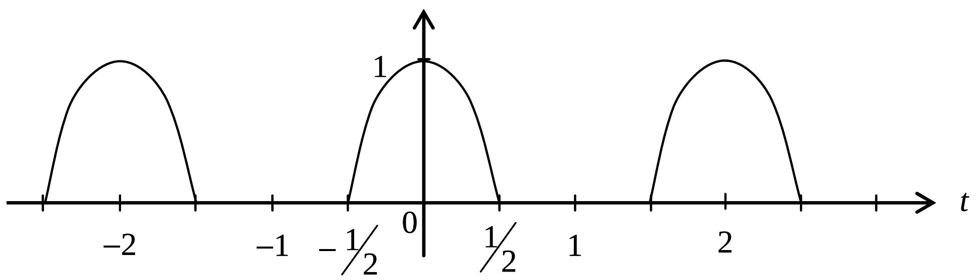
(2) $\dfrac{1}{4\pi}e^{jt}$

(3) 0

(4)



(5)



［４］

(1)

$g(t)=f(-t)$　　また、$F(\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}$

なので、$G(\omega)=\dfrac{1}{2-j\omega}$

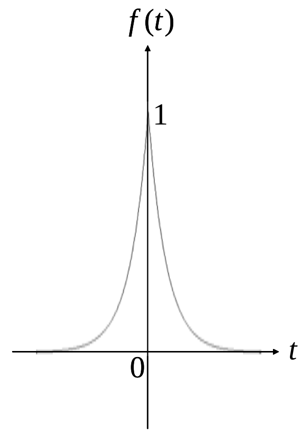
(2)

$F(\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}$ なので、$\Im\left[f(2t)\right]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2+j\dfrac{\omega}{2}}=\dfrac{1}{4+j\omega}$

(3)

$\Im\left[g(t-3)\right]=\dfrac{e^{-j3\omega}}{2-j\omega}$

(4)



(5)

$\exp(-2|t|)$

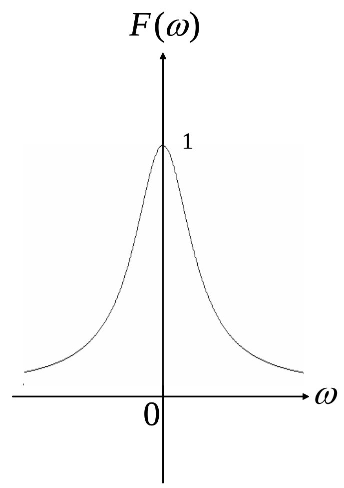
(6)

$\exp\left(-2\dfrac{T_{FWHM}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$T_{FWHM}=\ln 2$

(7)

$\dfrac{1}{2+j\omega}+\dfrac{1}{2-j\omega}=\dfrac{4}{4+\omega^2}$　　なので、



(8)

$\dfrac{1}{2+j\omega}\cdot\dfrac{1}{2-j\omega}=\dfrac{1}{4+\omega^2}$

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

［５］

（１）　$H(\omega)=\sqrt{2^2+\omega^2}\exp\left[j\theta(\omega)\right]=\sqrt{4+\omega^2}\exp\left[j\theta(\omega)\right]$

ただし，$\theta(\omega)=\tan^{-1}(\omega/2)$

（２）　$L\left[\exp(j\omega_0 t)\right]=H(\omega_0)\exp(j\omega_0 t)$ より

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\exp(j0t)$ を利用して，$L\left[\frac{1}{2}\right]=H(0)\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

（３）　$L\left[\exp(j\omega_0 t)\right]=H(\omega_0)\exp(j\omega_0 t)$ より

$\exp(j2t)$ を利用して，

$$
\begin{aligned}
L[\cos 2t]&=\mathrm{Re}\left[H(2)\exp(j2t)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\sqrt{4+2^2}\exp\left\{j\tan^{-1}(2/2)\right\}\exp(j2t)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[4\exp(j\pi/4)\exp(j2t)\right]\\
&=4\cos(2t+\pi/4)
\end{aligned}
$$

または

$$
\begin{aligned}
L[\cos 2t]&=\mathrm{Re}\left[H(2)\exp(j2t)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[(2+j2)(\cos 2t+j\sin 2t)\right]\\
&=2(\cos 2t-\sin 2t)
\end{aligned}
$$

（４）　$L\left[\exp(j\omega_0 t)\right]=H(\omega_0)\exp(j\omega_0 t)$ および $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$ より

$$
\begin{aligned}
L\left[\cos^2 t\right]&=L\left[\frac{1}{2}\right]+L\left[\frac{\cos 2t}{2}\right]\\
&=1+4\cos(2t+\pi/4)
\end{aligned}
$$

または

$$
\begin{aligned}
L\left[\cos^2 t\right]&=L\left[\frac{1}{2}\right]+L\left[\frac{\cos 2t}{2}\right]\\
&=1+2(\cos 2t-\sin 2t)
\end{aligned}
$$

［６］

（１）　$v_i=Ri+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}idt$　　（１）

$v_o=Ri$　　（２）

（１）を微分して　$\frac{dv_i}{dt}=R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i$　　（３）

（２）→（３）　$\frac{dv_i}{dt}=\frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{RC}v_o$

（２）（１）の結果を両辺フーリエ変換して

$$j\omega V_i(\omega)=\left(j\omega+\frac{1}{RC}\right)V_o(\omega)$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
H(\omega)&=\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}=\frac{j\omega}{j\omega+1/RC}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\\
&=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)\exp(j\theta)\\
&=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\exp\left[j\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ここで，$\theta=-\tan^{-1}(\omega RC)$

（３）

$$
\begin{aligned}
h(t)&=\mathfrak{I}^{-1}\left[H(\omega)\right]\\
&=\mathfrak{I}^{-1}\left[\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\right]\\
&=\mathfrak{I}^{-1}\left[1-\frac{1}{1+j\omega RC}\right]\\
&=\mathfrak{I}^{-1}[1]-\frac{1}{RC}\mathfrak{I}^{-1}\left[\frac{1}{1/RC+j\omega}\right]\\
&=\delta(t)-\frac{1}{RC}\exp\left(j\frac{t}{RC}\right)u(t)
\end{aligned}
$$

（４）　$\cos\omega_0 t$ を $\exp(j\omega_0 t)$ とおいて

$$
\begin{aligned}
v_o&=\mathrm{Re}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\frac{\omega_0 RC}{\sqrt{1+\omega_0{}^2R^2C^2}}\exp\left\{j\left(\omega_0 t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]\\
&=\frac{\omega_0 RC}{\sqrt{1+\omega_0{}^2R^2C^2}}\cos\left(\omega_0 t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$\theta=-\tan^{-1}(\omega_0 RC)$