電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　（2008.7.23）

E1：西舘・岩井　E2:黒川

解答にあたっては、途中の導出過程も示すこと。またグラフを描く場合は、横軸、縦軸と曲線の交わる点などの値を記入すること。以下において、$u(t)$ は単位階段関数、$\delta(t)$ はデルタ関数、$\mathrm{rect}(\mathrm{t})$ は矩形関数である。問題の最後にヒントがあるので、必要に応じて参考にしてよい。

［1］　次の問に答えよ。（3 点×4=12 点）

(1) $\mathrm{f}(t)=\sin 2t+\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{3}$ の基本周期を求めよ。

(2) $2\exp\left(j\frac{5}{6}\pi\right)$ を直交形式に直せ。

(3) $\left(1-j\sqrt{3}\right)^3$ を指数関数形式に直せ。

(4) 複素表示を用いて $f(t)=30\cos\left(15t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{d}{dt}\left(2\cos 15t\right)$ の計算をせよ。

［2］　次の周期関数 $f(t)$ について以下の問に答えよ。（3 点×5=15 点）

$$f(t)=1-\frac{2}{T}|t| \quad \left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right) \quad \text{ただし、} T>0 \text{ であり、} f(t)=f(t+T)$$

(1) $f(t)$ は偶関数か奇関数か。

(2) $f(t)$ の三角フーリエ級数展開の係数 a_0 を求めよ。

(3) $f(t)$ の三角フーリエ級数展開の係数 a_n を求めよ。

(4) $f(t)$ の三角フーリエ級数展開の係数 b_n を求めよ。

(5) $f(t)$ を三角フーリエ級数で表せ。

［3］　次の問に答えよ。（3 点×5=15 点）

(1) $\frac{\delta(t)}{1+t}+\frac{d\delta(t)}{dt}$ をフーリエ変換せよ。

(2) $\frac{\delta(\omega-1)}{1+\omega}$ を逆フーリエ変換せよ。

(3) $\mathrm{u}(\mathrm{t})\delta(\mathrm{t}+2)$ を簡単にせよ。

(4) $\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}-1}{2}\right)$ のグラフを描け。

(5) $\left\{\cos(\pi\mathrm{t})\cdot\mathrm{rect}(\mathrm{t})\right\}*\left\{\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{t}-2\mathrm{n})\right\}$ のグラフを描け。

［4］　２つの関数, $f(t)=e^{-2t}u(t)$, $g(t)=e^{2t}u(-t)$ について次の問に答えよ。（3 点×8=24 点）

(1) $g(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

(2) $f(2t)$ のフーリエ変換を求めよ。

(3) $g(t-3)$ のフーリエ変換を求めよ。

(4) $\mathrm{f}(t)+\mathrm{g}(t)$ をグラフに示せ。

(5) $\mathrm{f}(t)+\mathrm{g}(t)$ を単位階段関数を使わずに、1 つの式で表せ。

(6) $\mathrm{f}(t)+\mathrm{g}(t)$ の半値幅を求めよ。

(7) $\mathrm{f}(t)+\mathrm{g}(t)$ のフーリエ変換を求め、グラフに描け。

(8) $\mathrm{p}(t)=\mathrm{f}(t)*\mathrm{g}(t)$ とする。＊は畳み込み積分を表す。この時、$\mathrm{p}(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

［5］ システム関数$H(\omega)=2+j\omega$の線形システムについて次の問いに答えよ。(4 点×4=16 点)

(1) $H(\omega)$を指数関数形式に直せ。

(2) 直流$1/2$の入力に対する出力を求めよ.

(3) 交流$\cos 2t$の入力に対する出力を求めよ.

(4) 交流$\cos^2 t$の入力に対する出力を求めよ.

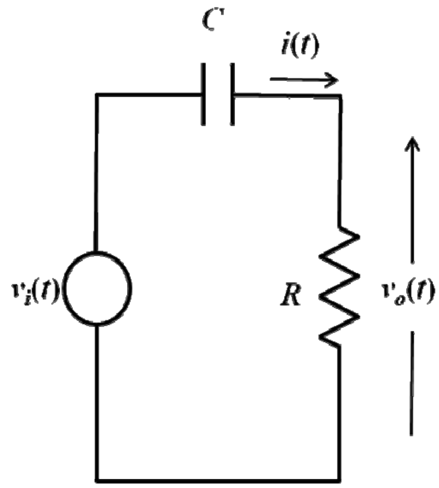
［6］ 抵抗とコンデンサの直列回路に印加された電源電圧$v_i(t)$と抵抗における電圧降下$v_o(t)$との関係について、次の問に答えよ。(6 点×1＋4 点×3=18 点)

(1) 電源電圧$v_i(t)$と抵抗における電圧降下$v_o(t)$が満足する微分方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた微分方程式の両辺をフーリエ変換し、システム関数$H(\omega)=V_0(\omega)/V_i(\omega)$を求めよ。ただし、$V_i(\omega)$と$V_0(\omega)$は、それぞれ電源電圧$v_i(t)$と抵抗における電圧降下$v_o(t)$のスペクトルである。

(3) 回路のインパルス応答を求めよ。

(4) 回路に交流電圧$v_i(t)=\cos\omega_0 t$が印加されたときの電圧降下$v_o(t)$を求めよ。



ヒント：

・ 三角フーリエ級数の公式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\},\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

・フーリエ変換の公式 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$

・フーリエ逆変換の公式 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$

・信号$\mathrm{f}(t)$ と$\mathrm{g}(t)$ のコンボリューションは$\mathrm{f}(t)*\mathrm{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(t-x)dx$

・ $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

・ $f(t)$のフーリエ変換が$F(\omega)$のとき、 $f(t)e^{j\omega_0 t}$のフーリエ変換は$F(\omega-\omega_0)$

・ $f(t)$のフーリエ変換が$F(\omega)$のとき、 $f(t-t_0)$のフーリエ変換は$F(\omega)e^{-jt_0\omega}$

・ $f(t)$のフーリエ変換が$F(\omega)$のとき、 $f(at)$のフーリエ変換は$\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$