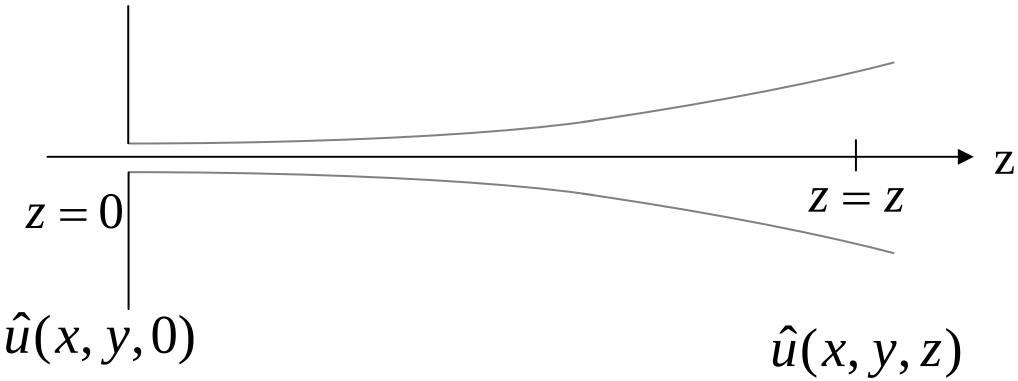
2011.12.20

「 システムフォトニクス特論」副教材（7）

2011年度版

黒川 隆志

回折



【フレネル近似】

$$\hat{u}(x,y,z)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\left\{\hat{u}(x,y,0)*\exp\left[\frac{ik\left(x^2+y^2\right)}{2z}\right]\right\}$$

$$\hat{U}_z\left(\Omega_x,\Omega_y\right)=\hat{U}_0\left(\Omega_x,\Omega_y\right)\mathrm{e}^{ikz}\exp\left[-\frac{iz}{2k}\left(\Omega_x{}^2+\Omega_y{}^2\right)\right]$$

分散

$z = 0$ $\quad$ $\hat{u}(0,t)\exp(i\omega_0 t)$

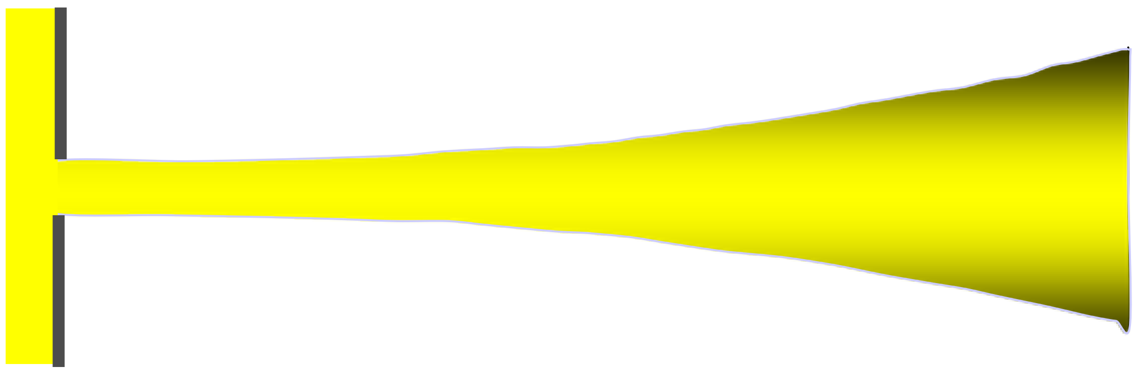
$z = z$ $\quad$ $\hat{u}(z,t)\exp\left[i\left(\omega_0 t - \beta_0 z\right)\right]$

【２次分散までの近似】

$$\hat{u}(z,\tau) = \hat{u}(0,\tau) * \frac{1}{\sqrt{i2\pi\beta_0'' z}} \exp\left[i\frac{\tau^2}{2\beta_0'' z}\right] \qquad \tau \equiv t - \beta_0' z$$

$$\hat{U}(z,\Omega) = \hat{U}(0,\Omega)\exp\left[-\frac{i\beta_0'' z}{2}\Omega^2\right] \qquad \Omega \equiv \omega - \omega_0$$

回折と分散



$$h_z(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\left[\frac{ik\left(x^2+y^2\right)}{2z}\right]$$

$$H_z\left(\Omega_x,\Omega_y\right) \simeq e^{ikz}\exp\left[-\frac{iz}{2k}\left({\Omega_x}^2+{\Omega_y}^2\right)\right]$$

$$h(z,\tau) = \frac{e^{i\omega_0\tau}}{\sqrt{i2\pi\beta_0'' z}}\exp\left[i\frac{\tau^2}{2\beta_0'' z}\right]$$

$$H(z,\Omega) \simeq \exp\left[-\frac{i\beta_0'' z}{2}\Omega^2\right]$$

回折と分散の対称性

- 回折と分散
- 空間と時間のTalbot 効果
- 空間レンズと時間レンズ

これらの対称性は、どこから来るのか

Maxwell’s equationはもともと時間と空間に対して対称

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,z,t)$$

Symmetry in Maxwell's equation

Maxwell's equation $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,z,t)$$

- 回折の場合　単色光として $u(x,y,z,t)=\hat{u}(x,y,z)\exp\left[i(kz-\omega_0 t)\right]$ とおくと、

  近軸近似 $\left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}\right|,\quad \left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}\right|$ SVEA近似 $\left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right| \ll \left|k\frac{\partial\hat{u}}{\partial z}\right|$ の条件で

  $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{u}(x,y,z)+i2k\frac{\partial}{\partial z}\hat{u}(x,y,z)=0$$

- 分散の場合

  分散媒質中では $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E(x,y,z,t)=\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}D(x,y,z,t)$$

  単一モード、SVEA近似として $u(x,y,z,t)=\hat{u}(z,t)\exp\left[i(\omega_0 t-\beta_0 z)\right]$ とおくと、

  ２次分散までの近似 $\beta(\omega)\simeq\beta_0+\beta_0'(\omega-\omega_0)+\frac{\beta_0''}{2}(\omega-\omega_0)^2$ の条件で

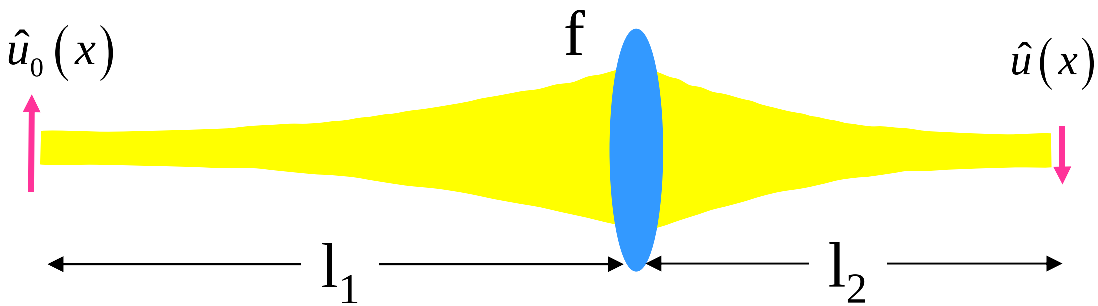
  $$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\hat{u}(z,\tau)+i\frac{2}{\beta_0''}\frac{\partial}{\partial z}\hat{u}(z,\tau)=0$$

  ただし、$\tau\equiv t-\beta_0' z=t-\frac{z}{v_g}$

対応関係

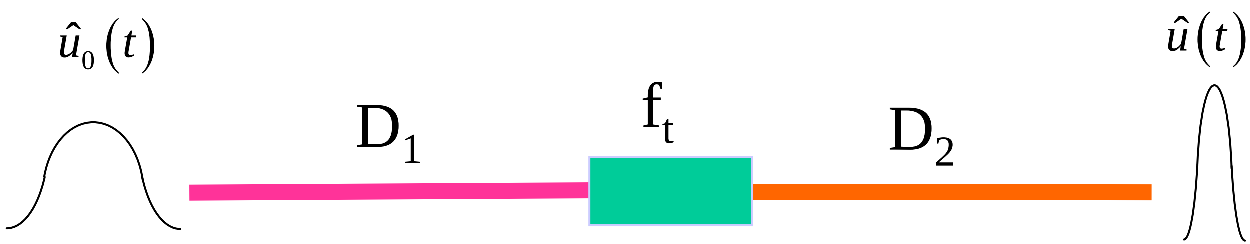
	回折	分散
時間周波数	単色	有限の幅
空間周波数	有限の幅	単色（単一モード）
波数の近似	近軸近似	２次分散までの近似
包絡線の近似	SVEA	SVEA
	Ω_x, Ω_y	$\omega - \omega_0$
	x, y	t
	k	$1/\beta''$
	平面波	チャープの無いパルス
	球面波	チャープの有るパルス

空間レンズと時間レンズ



$$T(x) = \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f}\right)$$

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f} \qquad M = \frac{l_2}{l_1} \qquad \hat{u}(x) = -\frac{i}{\sqrt{M}} \exp\left(\frac{ikx^2}{2Mf}\right) \hat{u}_0\left(-\frac{x}{M}\right)$$



$$T(t) = \exp\left(-\frac{i\omega_0^2 t^2}{4\pi c f_t}\right)$$

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} = -\frac{1}{f_t} \qquad M = \frac{D_2}{D_1} \qquad \hat{u}(t) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{M}} \exp\left(\frac{i\omega_0^2 t^2}{4\pi c M f_t}\right) \hat{u}_0\left(-\frac{t}{M}\right)$$

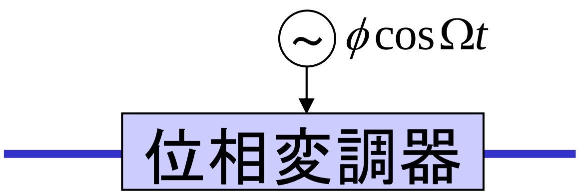
$M < 0$（時間反転）はあるのか？

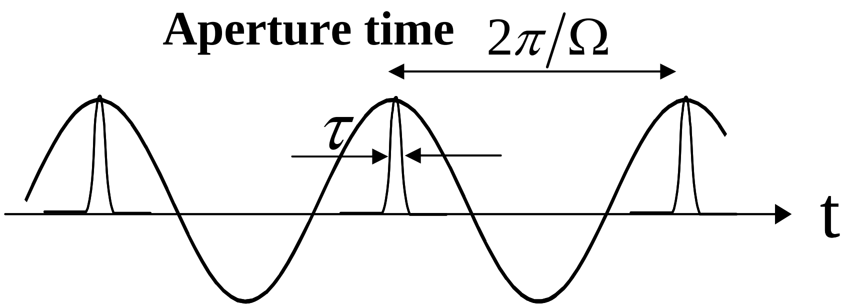
時間レンズの構成法

- 光カー効果による方法 → 強度に依存
- 位相変調器による方法 $T(t) = \exp\left[i\phi\cos\left(\Omega t + \theta\right)\right]$

$$e_o(t) = u_0(t)\, e^{i\phi\cos\Omega t}$$
$$\cong e^{i\phi} u_0(t) \exp\left(-i\frac{\phi\Omega^2}{2}t^2\right)$$
$$f_t = \frac{\omega_0^2}{2\pi c\phi\Omega^2}$$

- 変調周波数Ωは、パルス繰り返し周波数に一致
- 初期位相 θ はパルスに同期
- パルス波形は繰り返しに比べて短い

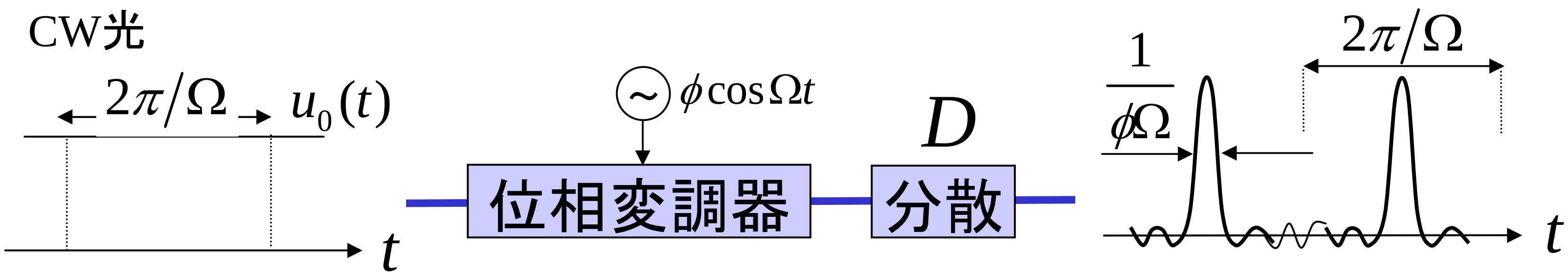




時間レンズへ入射するパルス幅 τ は$1/\Omega$ 以下にせねばならない

➡ 時間レンズの開口時間を$1/\Omega$と考えることができる。

時間レンズによる光パルス生成

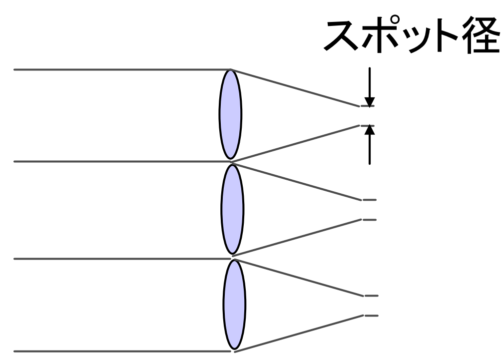


- $\frac{1}{D}=-\frac{1}{f_t}$ のとき、フーリエ変換される. $u(t)=\frac{\omega_0}{i2\pi\sqrt{cD}}\exp\left(\frac{i\omega_0^2t^2}{4\pi cf_t}\right)U_o\left(-\frac{\omega_0^2 t}{2\pi cf_t}\right)$
- レンズの開口時間の幅をの矩形波が $u_0(t)$ に対応するので、生成パルスは

$$u(t)=\frac{\omega_0}{i\Omega\sqrt{cD}}\exp\left(\frac{i\omega_0^2t^2}{4\pi cf_t}\right)\mathrm{sinc}(\pi\phi\Omega t)$$

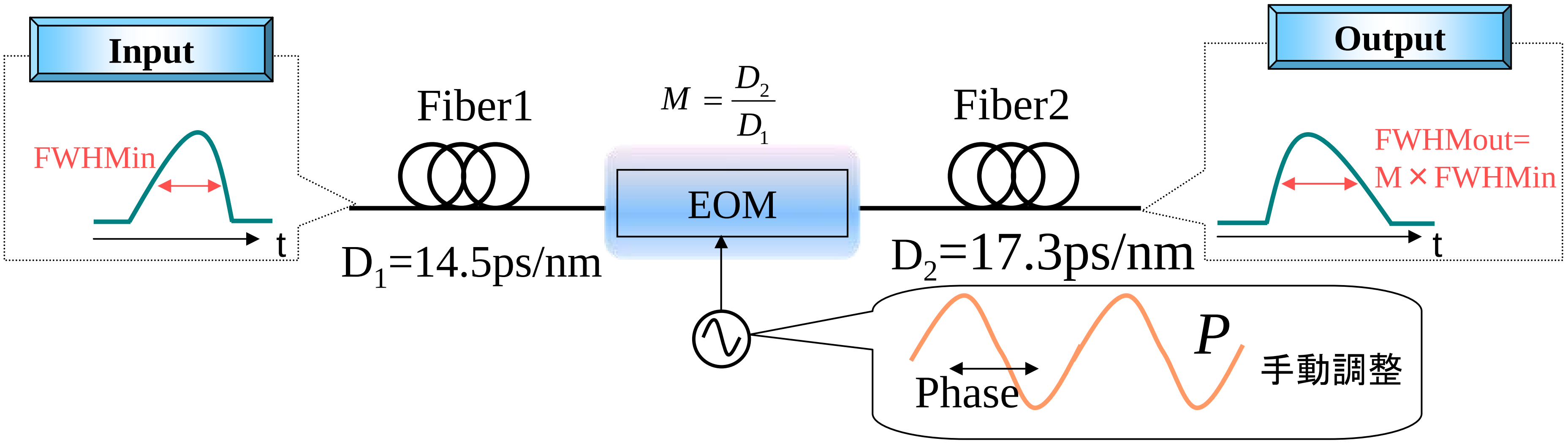
生成パルスの幅 $\simeq\frac{1}{\phi\Omega}\propto\frac{f_t}{(1/\Omega)}=\frac{(\text{焦点距離})}{(\text{開口時間})}$

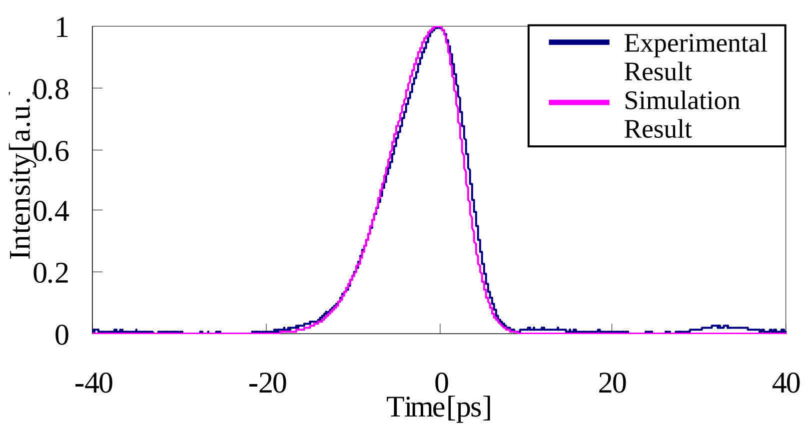
空間レンズによる集光スポット径に対応

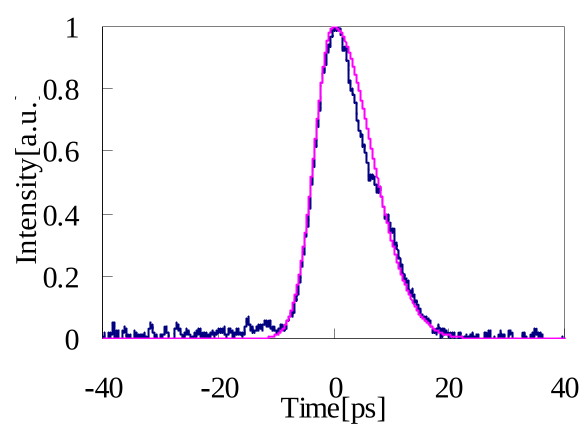


（注）$D=-\frac{\omega_0^2\beta''l}{2\pi c}$

時間レンズによるパルス波形の時間反転







FWHM:　9.50 ps → 11.0ps　　m = -1.16（theoretical:-1.19）