フーリエ解析および演習　期末テスト　（2011.7.18）

E1：黒川　E2: 西舘・岩井

解答にあたっては、途中の導出過程も示すこと。またグラフを描く場合は、横軸、縦軸と曲線の交わる点などの値を記入すること。以下において、$u(t)$ は単位階段関数、$\delta(t)$ はデルタ関数、$\mathrm{rect}(t)$ は矩形関数である。問題の最後（裏面）にヒントがあるので、必要に応じて参考にしてよい。

［1］ 次の問に答えよ。（12 点）

(1) $f(t)=\cos\frac{1}{4}t\cdot\sin\frac{1}{3}t$ の基本周期を求めよ。　(2) $\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$ を直交形式に直せ。

(3) $\left(\sqrt{3}-j\right)^2$ を指数関数形式に直せ。

(4) 複素表示を用いて $f(t)=\cos 3\omega t+\cos\left(3\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$ の計算をせよ。

(5) デルタ関数の性質を利用して、$\left(t^2+1\right)\delta\left(3t\right)$ を簡単にせよ。　(6) $t\cdot u\left(t+\frac{1}{2}\right)$ をグラフに書け。

［2］ 直列 RL 回路（R=1Ω, L=1H）に $e(t)=t$ $(-\pi<t<\pi)$ の周期電圧をかけた。（12 点）

(1) 周期電圧 $e(t)$ を複素フーリエ級数で表わせ。

(2) この回路のアドミタンス $Y(n\omega_0)$ の振幅スペクトルを求めよ。

(3) この回路のアドミタンス $Y(n\omega_0)$ の位相スペクトルを求めよ。

(4) 回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。

［3］ ガウス関数 $f(t)=\exp\left(-t^2\right)$ のフーリエ変換は、$F(\omega)=\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]$ のように与えられる。これを用いて次の問に答えよ。（15 点）

(1) $f_1(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{3}\right)^2\right]$ のフーリエ変換 $F_1(\omega)$ を求めよ。

(2) $f_1(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{3}\right)^2\right]$ の半値全幅（FWHM） T_1 を求めよ。

(3) $f_2(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{4}\right)^2\right]$ のフーリエ変換 $F_2(\omega)$ を求めよ。

(4) $p(t)=f_1(t)*f_2(t)$ とする。$*$ は畳み込み積分を表す。
このとき、$p(t)$ のフーリエ変換 $P(\omega)$ を求めよ。

(5) $p(t)=f_1(t)*f_2(t)$ を求めよ。

(6) $f_1(t)$ の半値全幅を T_1、$f_2(t)$ の半値全幅を T_2 とする。$p(t)$ の半値全幅を T_p とするとき、
$T_p=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ がなりたつことを示せ。

(7) $q(t)=f_1(t)u(t)+f_2(t)u(-t)$ とする。このとき、$q(t)$ の半値全幅（FWHM）を求めよ。

［4］ $f(t)=\mathrm{rect}(t)$ とする。$\mathrm{rect}(t)$ は矩形関数である。次の問に答えよ。（30 点）

(1) $f(t)$ のグラフを描け。

(2) $g(t)=f(t)+f(t-2)+f(t+2)$ のグラフを描け。少なくとも、$-3\le t\le 3$ の範囲で描くこと。

(3) $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めよ。

(4) $f\left(\frac{t-1}{2}\right)$ のグラフを描け。

(5) $f\left(\frac{t-1}{2}\right)$ のフーリエ変換を求めよ。

(6) $s(t)=\left(1-|t|\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ とする。$s(t)$ のグラフを描け。

(7) $s(t)$ のフーリエ変換 $S(\omega)$ を求めよ。

(8) $S(\omega)$ のグラフを描け。

(9) $f(t)$ の自己相関関数を $R(\tau)$ とするとき、$R(\tau)$ のフーリエ変換を求めよ。ウィナー - キンチンの定理を用いてよい。

(10) $f(t)$ の自己相関関数 $R(\tau)$ を求めよ。

［5］ 線形システムの入力 $f(t)$ と出力 $x(t)$ の関係が２階常微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=f(t)$$

で表されるとする。このシステムについて、次の問いに答えよ。ただし、このシステムのインパルス応答とシステム伝達関数をそれぞれ $h(t)$ と $H(\omega)$ とし、入力 $f(t)$ と出力 $x(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega)$ と $X(\omega)$ と記述するものとする。（18 点）

(1) システムへの入力が $f(t)=e^{j\omega_0 t}$ のとき、その出力が $H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ になることを示せ。

(2) ２階の微分方程式をフーリエ変換せよ。

(3) システム伝達関数 $H(\omega)$ を指数関数形式で求めよ。

(4) システムへの入力が $f(t)=\cos 3\omega_0 t+\cos\omega_0 t$ のときの出力 $x(t)$ を求めよ。

［6］ １階常微分方程式 $\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=t$　$x(0+)=1$ をラプラス変換を用いて解くことについて、以下の問いに答えよ。（13 点）

(1) 微分方程式の両辺をラプラス変換し、$X(s)$ を求めよ。

(2) $X(s)$ を部分分数に展開せよ。

(3) $X(s)$ をラプラス逆変換せよ。

ヒント：

- 三角フーリエ級数の公式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\},\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

- フーリエ変換の公式　$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$
- フーリエ逆変換の公式　$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$
- $\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)]=\frac{1}{\alpha+j\omega}$　（$\alpha>0$）
- $\mathcal{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-jt_0\omega}$
- $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$
- $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$
- $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- $\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega F(\omega)$
- $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
- $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$
- $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
- $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$
- デルタ関数列　$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$
- $\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
- 信号 $\mathrm{f}(t)$ と $\mathrm{g}(t)$ のコンボリューションは $\mathrm{f}(t)*\mathrm{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(t-x)dx$
- パーシバルの定理　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$
- 相関関数の定義　$f_1(t)$、$f_2(t)$ が実関数のとき　$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)dt$

- ラプラス変換の定義　$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$
- $\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$
- 微分のラプラス変換　$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=sF(s)-f(0_+)$
- 初期値定理　$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0_+)$
- 最終値定理　$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$
- シフト定理　$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s)$　$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=f(s+a)$
- コンボリューション $\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙１

［１］

(1)

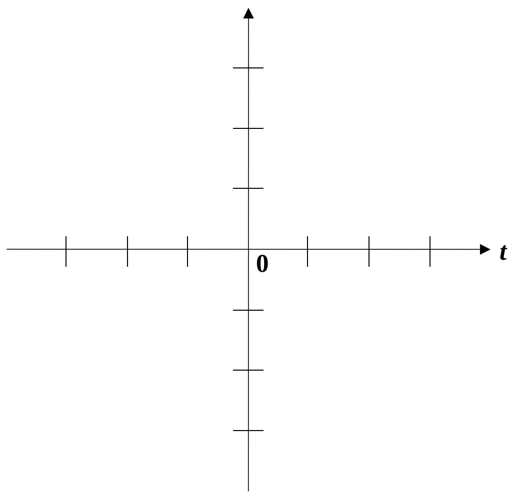
(2)

(3)

(4)

(5)

(6)



学生番号

氏名

［２］

(1)

(2)

(3)

(4)

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙２

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

［３］

⑴

⑵

⑶

⑷

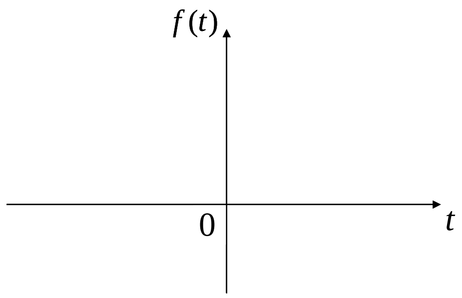
⑸

⑹

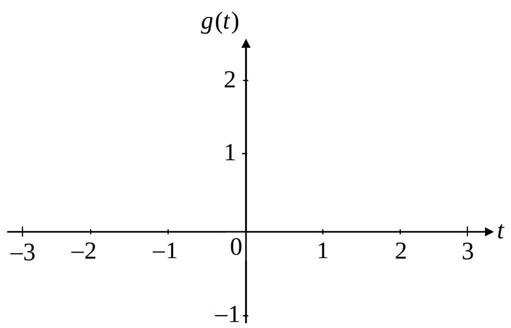
⑺

［4］

⑴

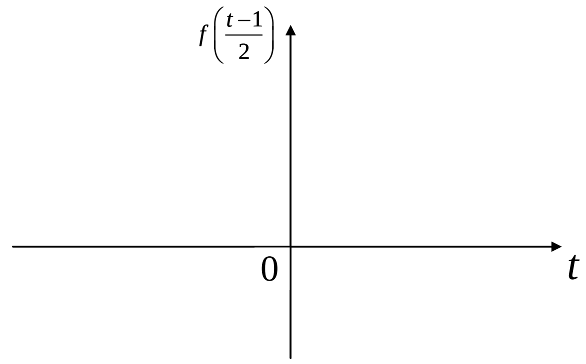


⑵

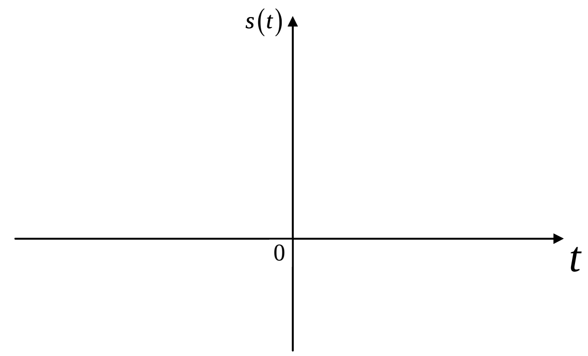


⑶

⑷



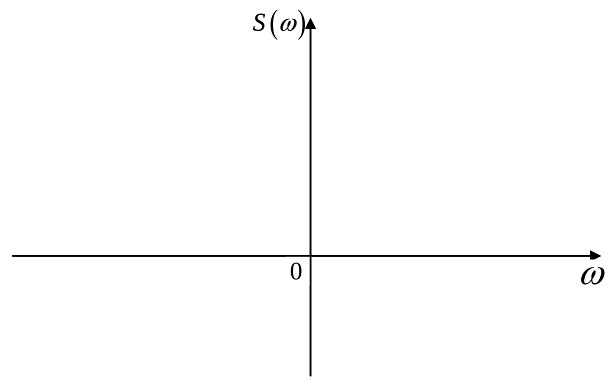
⑹



⑸

⑺

⑻



⑼

⑽

電気数学Ⅱおよび演習　期末テスト　解答用紙３

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

［５］

(1)

(2)

(3)

(4)

［６］

(1)

(2)

(3)