電気数学Ⅱ　小テスト１３

2011.7.8　黒川

（注）途中経過も書くこと。図は軸ラベル、原点、交点の座標等を正しく記入すること。
必要に応じて裏面のヒントを参照せよ。

１．次の問に答えよ。(4 点)

(1) 複素表示を用いて $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)-\dfrac{d}{dt}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ の計算をせよ。

(2) デルタ関数の性質を利用して、$(t+1)\delta(-2t)$ を簡単にせよ。

２．次の関数の逆フーリエ変換を求めよ。なお、必要なら答えに $u(t)$ を用いること。(6 点)

(1) $\dfrac{e^{-j\omega}}{2+j3\omega}$　　(2) $\dfrac{1}{3+j(\omega-2)}$　　(3) $\dfrac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

３．次の関数のラプラス変換を求めよ。ただし、ラプラス変換の定義式 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ により、計算すること。(6 点)

(1) $t\cdot u(t)$　　(2) $te^{-t}u(t)$　　(3) $e^{-t}\cos t\cdot u(t)$

４．次の関数のラプラス逆変換を求めよ。裏面のヒントを参考にせよ。(6 点)

(1) $F(s)=\dfrac{2}{s(s+2)}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$　　(3) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

５．次の周期関数 $f(t)$ について以下の問に答えよ。(12 点)

$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2\quad(-\pi<t<\pi)$　ただし、$f(t)=f(t+2n\pi)$　n: 整数

(1) $f(t)$ をグラフに書け。

(2) 三角フーリエ係数 a_0 を求めよ。

(3) 三角フーリエ係数 a_n を求めよ。

(4) 三角フーリエ係数 b_n を求めよ。

６．$\boxed{}$ のなかに式を入れよ。(6 点)

次の定積分　$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at^2}dt$　を計算したい。そこでまず、次の二重積分を計算する。

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\left(x^2+y^2\right)}dxdy \quad ①$$

①を極座標表示に書き改めると、$x^2+y^2=r^2,\quad dxdy=rdrd\theta$　より

$$I^2=2\pi\int_0^\infty \boxed{ア}dr \quad ②$$

となる。$ar^2=z$ とおき、変数変換すると、式②は

$$I^2=\int_0^\infty \boxed{イ}dz=\boxed{ウ}$$

よって最初の定積分の値 I は、　$I=\sqrt{\boxed{ウ}}$

（ヒント）

・ラプラス変換の定義　　$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

・ラプラス変換に関連する公式

・ $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$

・ $\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

・ $\mathcal{L}\left[\sin\omega t\right]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

・ $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$

・三角フーリエ級数の公式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\right\},\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

・フーリエ変換に関連する公式

・ $\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)]=\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$　　（$\alpha>0$）

・ $\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]=F(\omega)e^{-jt_0\omega}$

・ $\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]=F(\omega-\omega_0)$

・ $\mathcal{F}\left[f(at)\right]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

・ $\mathcal{F}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]=j\omega F(\omega)$

・ $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

・ $\mathcal{F}\left[\delta(t)\right]=1$

・ $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$