電気数学Ⅱ　小テスト 10　解答例

2011.6.17　黒川

1．

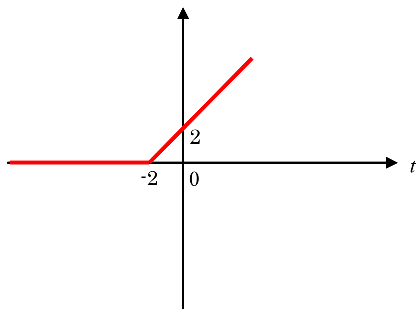
(1) $\int_{-\infty}^{\infty}(2t+1)^2\delta(t+1)dt=(2t+1)^2\big|_{t=-1}=1$

(2) $(t-1)\delta(-3t)=(t-1)\big|_{t=0}\frac{1}{3}\delta(t)=-\frac{1}{3}\delta(t)$

(3) $F[\delta(-3t)]=\frac{1}{3}F[\delta(t)]=\frac{1}{3}$

(4) $F\left[\frac{\delta(t-2)}{(t^2+1)}\right]=F\left[\frac{1}{5}\delta(t-2)\right]=\frac{1}{5}e^{-i2\omega}$

(5)



(6) $F^{-1}\left[\frac{1}{2+j3(\omega-2)}\right]=\frac{1}{3}F^{-1}\left[\frac{1}{2/3+j(\omega-2)}\right]=\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}e^{j2t}u(t)$

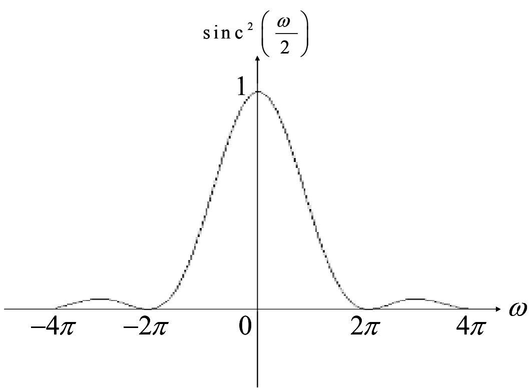
(7) $F^{-1}\left[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right]=F^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right]=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

(8) $F^{-1}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}\right]=\frac{1}{2}rect\left(\frac{t}{2}\right)$

2．

(1) $\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ なので、$E(\omega)=\mathcal{F}[R(\tau)]=\left|\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]\right|^2=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$

(2)



(3) 問(1)の WK の定理の結果から、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(t)\mathrm{rect}(t-\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$\tau=0$ とおくと、$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega$　この式の左辺は 1 となるから、

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega=2\pi$$

３．

(1)　$x'(t)+2x(t)=e^{j2t}$　　両辺をフーリエ変換して整理すると

$$j\omega X(\omega)+2X(\omega)=2\pi\delta(\omega-2) \qquad \therefore \quad (j\omega+2)X(\omega)=2\pi\delta(\omega-2)$$

(2)

$$X(\omega)=\frac{2\pi\delta(\omega-2)}{2+j\omega}=\frac{2\pi\delta(\omega-2)}{2+j2}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}2\pi\delta(\omega-2)$$

フーリエ逆変換して、

$$x(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{j\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

４．

(1)　$2\sqrt{\log_e 2}$

(2)　$\exp\left(-t^2\right)\exp\left\{-(t-\tau)^2\right\}$

(3)

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)\exp\left\{-(t-\tau)^2\right\}dt=\exp\left(-\tau^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-2t^2+2t\tau\right)dt$$

$$=\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2\right\}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)$$

５．最高周波数 f_m は 5kHz であるので、サンプリング間隔 T_s は

$T_s=\dfrac{1}{2f_m}=0.1[ms]$　以下でなければならない.