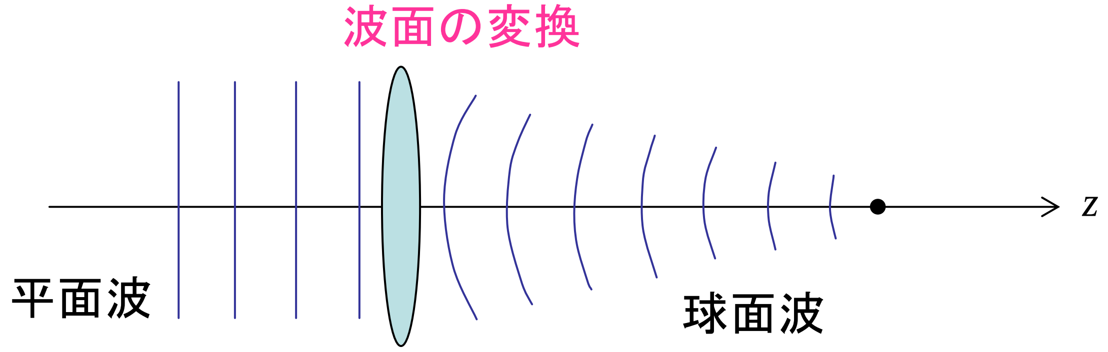
2010.12.6

「 システムフォトニクス特論」副教材（5）

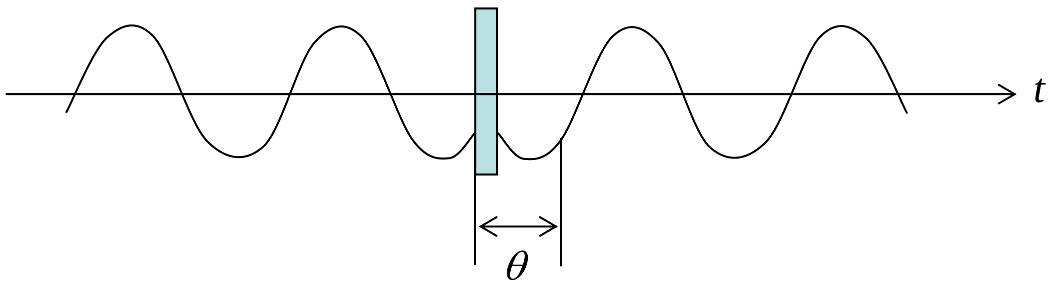
2010年度版

黒川 隆志

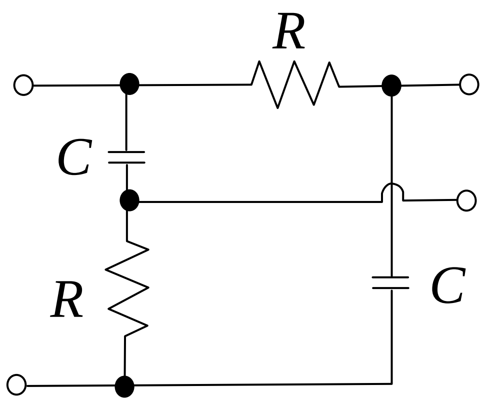
レンズは空間の移相器(phase shifter)



時間の移相器は



ex.



レンズの移相器としての機能

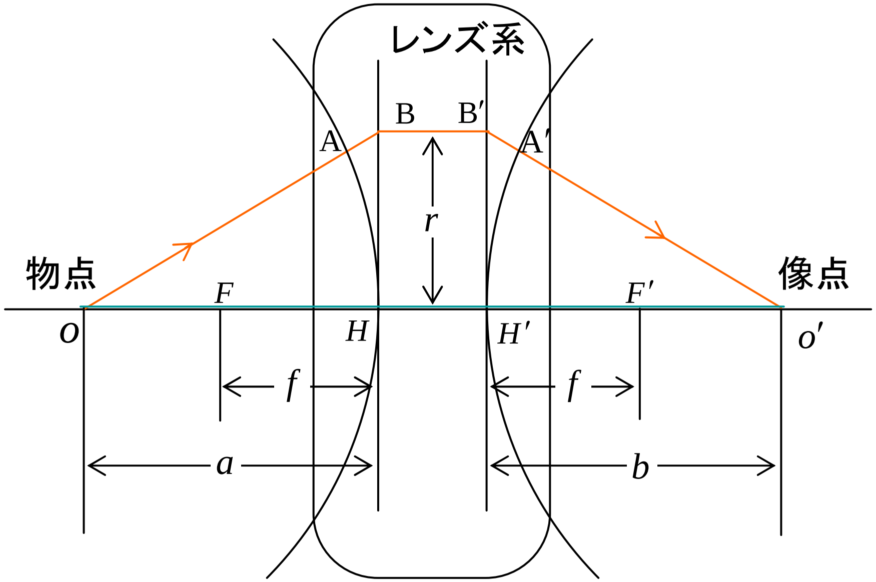
光路差

$$\sqrt{a^2+r^2}-a+\sqrt{b^2+r^2}-b$$

$$\approx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{r^2}{2}$$

$$=r^2/2f$$

$$\phi(x,y)=\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right)$$



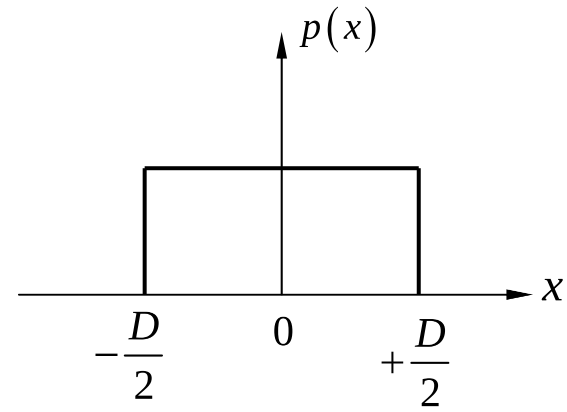
レンズの透過率

$$t(x,y)=p(x,y)\exp\left[-\frac{ik}{2f}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

瞳関数:レンズの開口Dをあらわす

$$p(x,y)=\begin{cases}1 & \left(\sqrt{x^2+y^2}\le D/2\right)\\ 0 & (others)\end{cases}$$

１次元レンズによる集光



レンズの開口をDとすると、瞳関数は

$$p(x) = rect(x/D)$$

焦点での振幅分布は、瞳関数のフーリエ変換

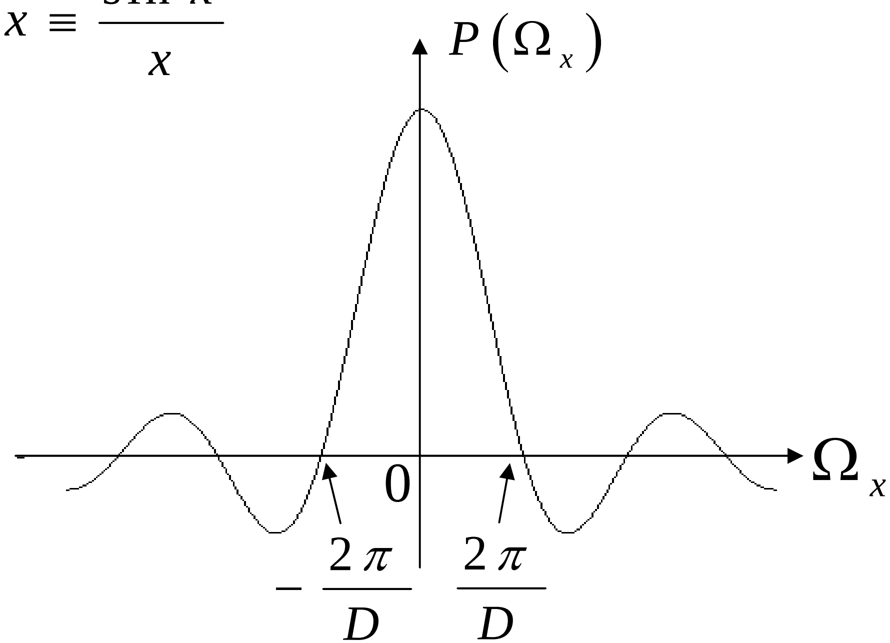
$$P(\Omega_x) = F\left[p(x)\right] \quad \text{（係数は省略）}$$

$$= \mathrm{sinc}(D\Omega_x/2)$$

$$\mathrm{sinc}\,x \equiv \frac{\sin x}{x}$$

ただし、 $\Omega_x = k\dfrac{x}{f}$ なので

$$u_f(x) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi D x}{\lambda f}\right)$$



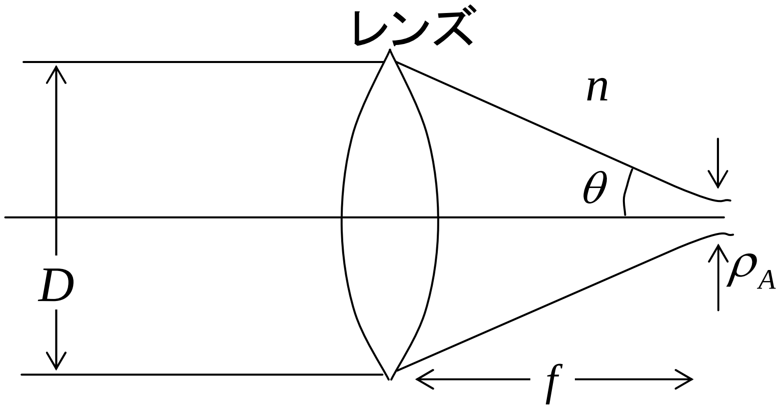
集光スポット半径は、

$$\rho_A = \frac{\lambda f}{D}$$

2次元レンズによる集光

瞳関数は極座標系で

$$p(r) = \begin{cases} 1 & (r < D/2) \\ 0 & (r > D/2) \end{cases}$$

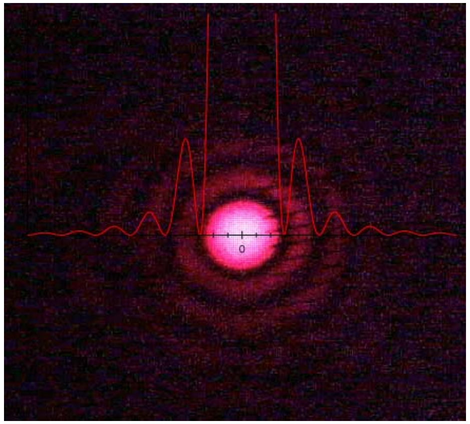


平面波がレンズに入射したとき、
集光スポットは瞳関数 $p(r)$ のフーリエ変換 $P(\rho)$

$$P(\rho) = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \frac{2J_1(\pi D\rho/\lambda f)}{(\pi D\rho/\lambda f)} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I \propto \left| \frac{J_1(\pi D\rho/\lambda f)}{(\pi D\rho/\lambda f)} \right|^2$$

J1:1次のベッセル関数



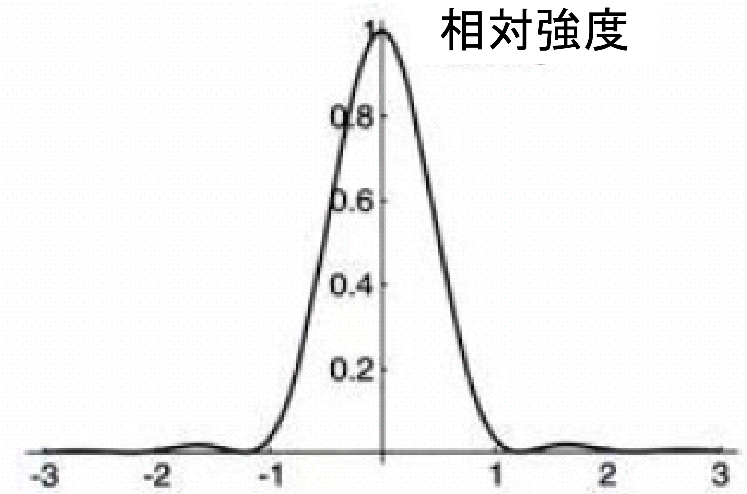
Airy pattern

集光スポット径

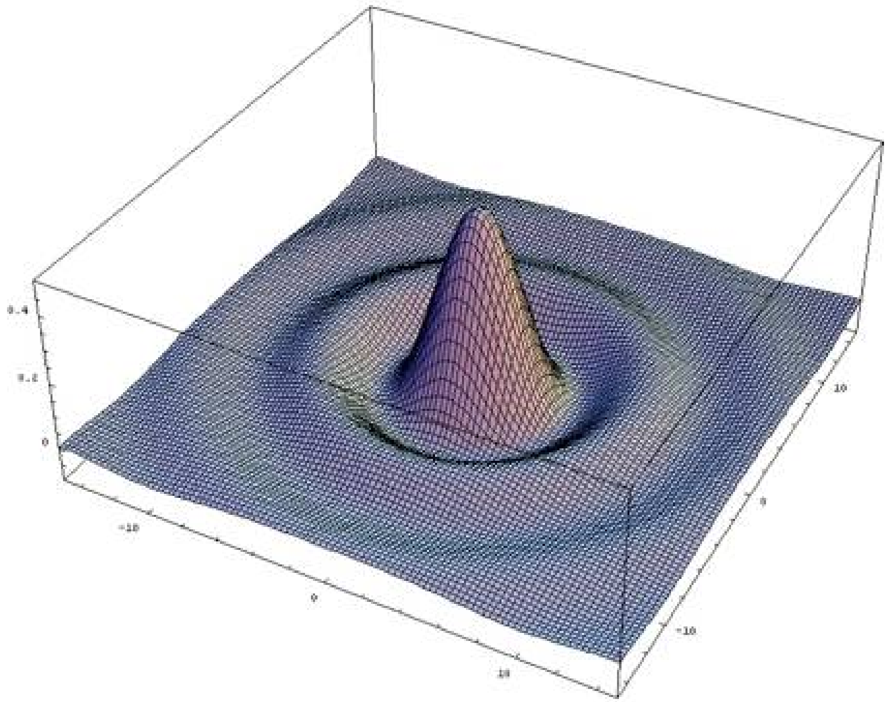
$$\rho_A = 1.22\lambda f/D$$
$$= 1.22\lambda F$$
$$= 0.61\lambda/(NA)$$

$$F = f/D$$ Fナンバー

$$NA = \sin\theta \cong D/2f$$ 開口数



焦点面上の規格化位置 $\frac{D}{\lambda f}\rho$



c.f. 円形開口のフラウンホッファー回折像

入力像　$p(r)$

回折像　$\mathcal{F}\left[p\left(r\right)\right]=P\left(\rho\right)$

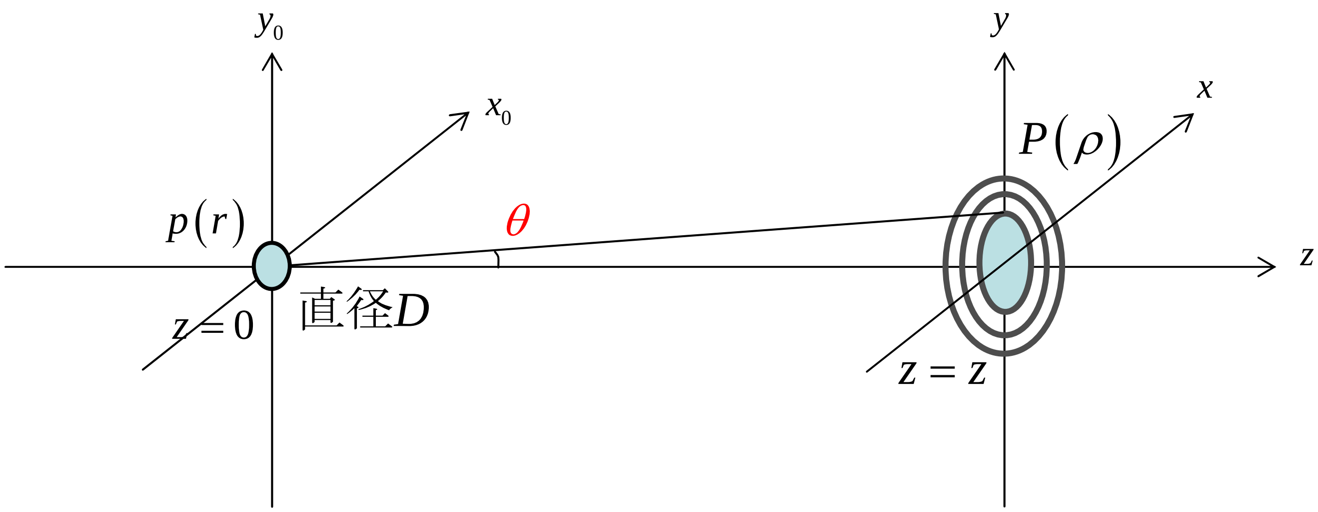
$$=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\frac{2J_1\left(\pi D\rho/\lambda z\right)}{\pi D\rho/\lambda z}$$

$$\rho_A=1.22\frac{\lambda z}{D}$$

$$\theta\cong\tan\theta$$

$$=\frac{\rho_A}{z}$$

$$=1.22\frac{\lambda}{D}$$



ここにもAiry patternができる

Q5-1. 波長0.6 μm、ビーム直径1 mmのレーザ光を、焦点距離 3mmのレンズで集光したとき、集光スポットの半径を求めよ。

レンズによる結像（1次元レンズの場合）

幾何光学で考えると、 入力像 $u_0(x_0)$ ⇒ 出力像 $u_0\left(-\frac{x}{m}\right)$

波動光学では、 点光源（入力） ⇒ 点像応答関数（インパルス応答）

入力像 $\delta(x_0)$

レンズの瞳関数 $p(x) = rect\left(\frac{x}{D}\right)$

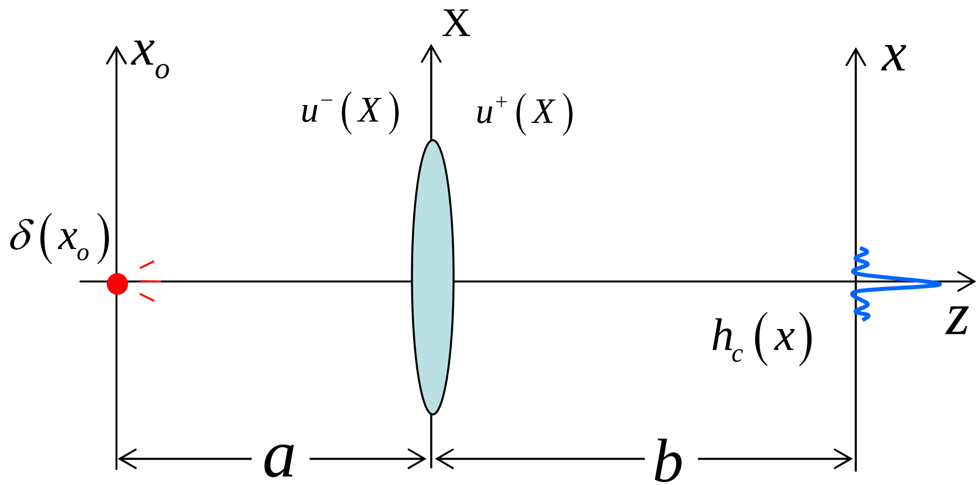
瞳関数のフーリエ変換 $P(\Omega_x) = \mathrm{sinc}\left[\frac{D\Omega_x}{2}\right]$

出力像 $h_c(x) = P(\Omega_x)$ ただし、$\Omega_x = k\frac{x}{b} = \frac{2\pi x}{(m+1)\lambda f}$ なので

点光源 点像応答関数

$$\delta(x_0) \longrightarrow h_c(x) = \mathrm{sinc}\left[\frac{\pi D x}{(m+1)\lambda f}\right]$$

$$u(x) = h_c(x) * u_0\left(-\frac{x}{m}\right)$$



レンズによる結像（２次元レンズの場合）

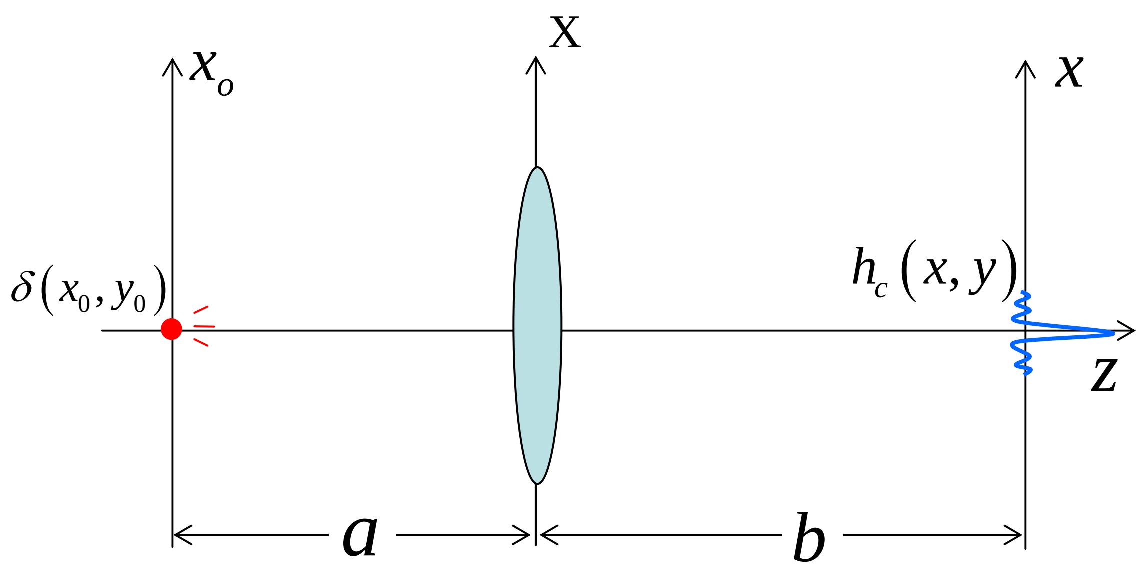
点像応答関数は

$$h_c(x,y) = P(\rho)$$

$$= \frac{J_1\left(\pi D\rho / (m+1)\lambda f\right)}{\pi D\rho / (m+1)\lambda f} = \frac{J_1\left(\pi D\sqrt{x^2+y^2} / (m+1)\lambda f\right)}{\pi D\sqrt{x^2+y^2} / (m+1)\lambda f}$$

出力像は

$$u(x,y) = h_c(x,y) * u_0\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)$$



LPFとレンズ結像の対応

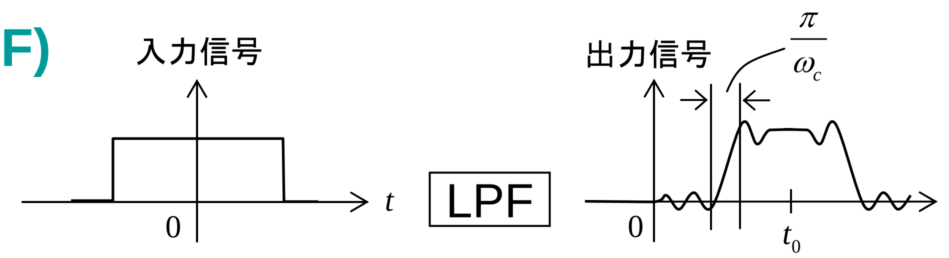
時間領域の低域通過フィルタ(LPF)

$$H(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2\Omega_c}\right)e^{-jt_0\omega}$$

入力　$f(t)$

$\downarrow$

出力　$g(t) = \sin c(\Omega_c t) * f(t - t_0)$



空間領域のレンズ結像(瞳関数)

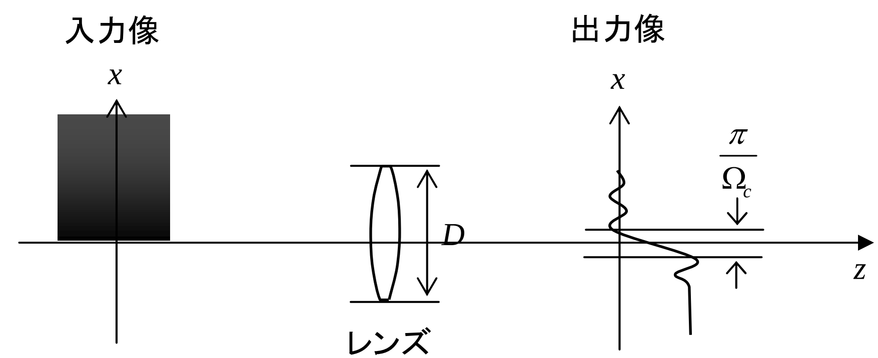
$$h(x) = \sin c\left[\frac{\pi D x}{(m+1)\lambda f}\right]$$

$$H(\Omega_x) = rect\left[\frac{\Omega_x}{2\Omega_c}\right] \qquad \Omega_c = \frac{\pi D}{(m+1)\lambda f}$$

入力$f(x)$

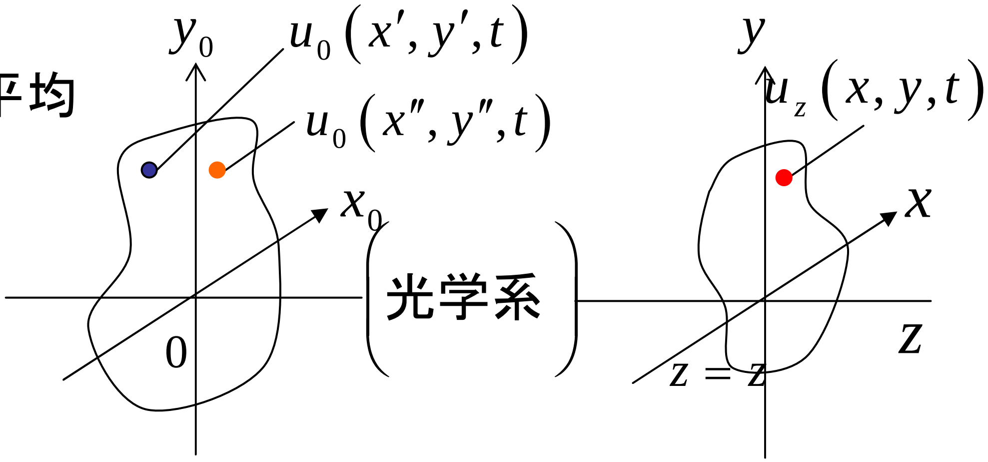
$\downarrow$

出力$g(x) = \sin c[\Omega_c x] * f(x)$



像の観測（１）

観測する像の出力∝光パワーの時間平均



$$I(x,y) = \langle u_z^*(x,y,t) u_z(x,y,t) \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_z^*(x,y,t) u_z(x,y,t) dt$$

$u_z(x,y,t) = h_z(x,y) * u_0(x,y,t)$　　だから

$$I(x,y) = \langle \{h_z^*(x,y) * u_0^*(x,y,t)\}\{h_z(x,y) * u_0(x,y,t)\} \rangle$$
$$= \iint\iint h_z^*(x-x', y-y') h_z(x-x'', y-y'') \langle u_0^*(x', y', t) u_0(x'', y'', t) \rangle dx'dy'dx''dy''$$

これは入力面上の点(x', y')と点(x'', y'')における光波の空間コヒーレンスに依存する。

像の観測（２）

[1] 入力画面上の光波が空間的にコヒーレントの場合

ex. レーザーからのコリメート光による照明

$$\left\langle u_0^*(x',y',t)u_0(x'',y'',t)\right\rangle = u_0^*(x',y')u_0(x'',y'')$$

なので

$$I(x,y) = \iint h_z^*(x-x',y-y')u_0^*(x',y')dx'dy' \iint h_z(x-x'',y-y'')u_0(x'',y'')dx''dy''$$
$$= \left|h_z(x,y) * u_0(x,y)\right|^2$$

したがって

$$u_z(x,y) = h_c(x,y) * u_0(x,y)$$

⇦ 振幅に対して

とおくことができる

$$H_c(\Omega_x,\Omega_y) = \mathcal{F}\left[h_c(x,y)\right]$$

コヒーレント伝達関数（CTF)

像の観測(3)

[2] 入力面上の光波が空間的にインコヒーレント

ex. LEDによる照明

$$\left\langle u_0^*(x',y',t)u_0(x'',y'',t)\right\rangle = \left|u_0(x',y')\right|^2 \delta(x'-x'',y'-y'')$$ なので

$$I(x,y) = \iint \left|h_z(x-x',y-y')\right|^2 \left|u_0(x',y')\right|^2 dx'dy'$$
$$= \left|h_z(x,y)\right|^2 * \left|u_0(x,y)\right|^2$$

$$\left|u_z(x,y)\right|^2 = h_i(x,y) * \left|u_0(x,y)\right|^2$$ ⇦ パワーに対して

ただし $h_i(x,y) = \left|h_c(x,y)\right|^2$

$$H_i(\Omega_x,\Omega_y) = \mathcal{F}\left[\left|h_c(x,y)\right|^2\right]$$
$$= H_c(\Omega_x,\Omega_y) \otimes H_c^*(\Omega_x,\Omega_y)$$

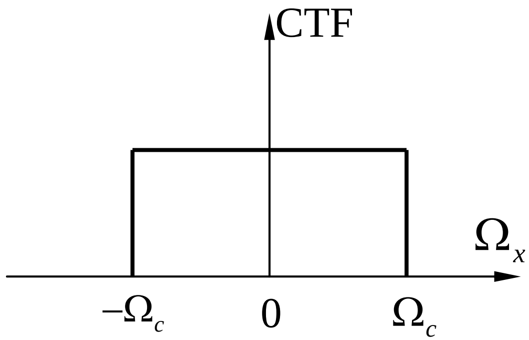
光学伝達関数(OTF)

$$H_{OTF}(\Omega_x,\Omega_y) = \frac{H_i(\Omega_x,\Omega_y)}{H_i(0,0)} = \frac{\iint H_c(\Omega_x',\Omega_y')H_c^*(\Omega_x'-\Omega_x,\Omega_y'-\Omega_y)\,d\Omega_x'd\Omega_y'}{\iint \left|H_c(\Omega_x',\Omega_y')\right|^2 d\Omega_x'd\Omega_y'}$$

１次元のレンズの場合

レンズの開口をDとすると、コヒーレント系での点像応答関数

$$h_c(x) = \mathrm{sinc}\left[\frac{\pi D x}{(m+1)\lambda f}\right]$$

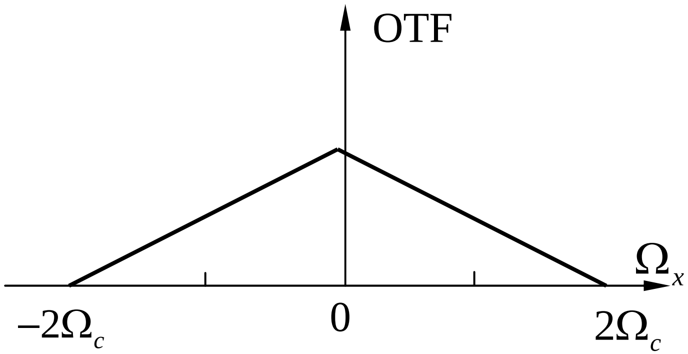


コヒーレント光学系の伝達関数

$$H_c(\Omega_x) = rect\left[\frac{(m+1)\lambda f \Omega_x}{2\pi D}\right]$$

コヒーレント系の出力像の遮断角周波数

$$\Omega_c = \frac{\pi D}{(m+1)\lambda f}$$

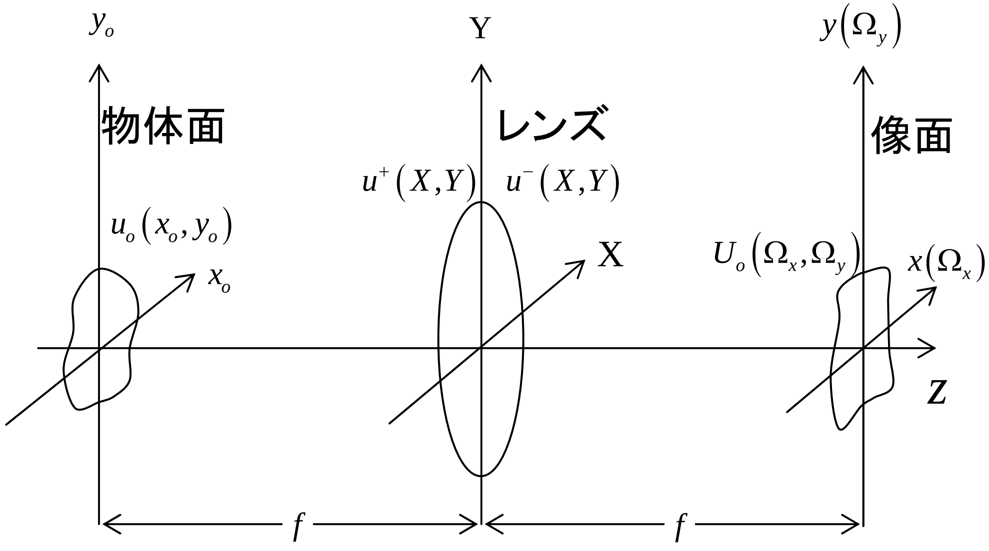


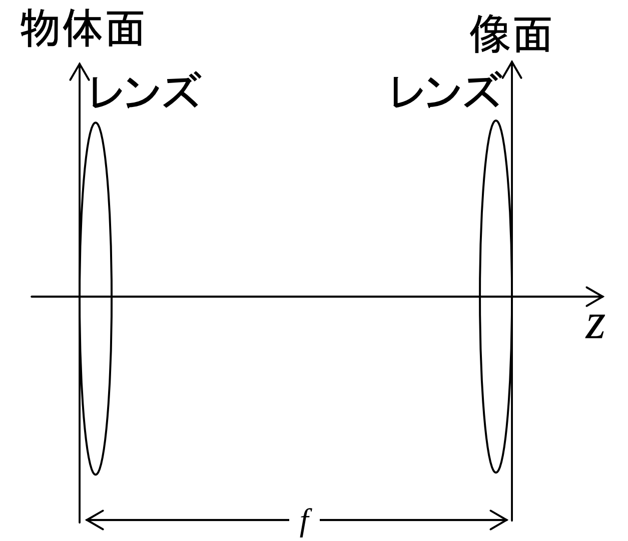
インコヒーレント光学系の伝達関数

$$H_i(\Omega_x) = 1 - \frac{|\Omega_x|}{2\Omega_c}$$

Q5-2. 凸のシリンドリカルレンズ(F＝1.2)を用いた一次元の結像光学系がある。波長0.5μmのインコヒーレント光入力像を照明して、1/100に縮小した像を作ろうとしたとき、出力像の遮断周波数を求めよ。また、このとき入力像の空間周波数は最大どのくらいまで結像しうるか。

レンズのフーリエ変換機能





f−f 配置の系

物体面の直後と像面の直前にレンズを配置した系