量子ループ代数の加群におけるテンソル積と古典極限を取る操作の非可換性について

東京農工大学工学研究院　直井　克之 (Katsuyuki Naoi)
Institute of Engineering,
Tokyo University of Agriculture and Technology

概要

本稿では著者の論文 "Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products" [Nao16] の主結果について紹介する。

1　導入

基礎体を複素数体 $\mathbb{C}$ とする。$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数とするとき, $\mathbf{L}\mathfrak{g} := \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ は自然なブラケット積により Lie 代数となる。これを**ループ代数**と呼ぶ。**量子ループ代数** $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, ループ代数の普遍包絡環 $U(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の量子変形として, 生成元と関係式から定義される $\mathbb{C}(q)$-代数である[*1]。本稿では以下, 有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群について考察を行う。

V を $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群とする。$V$ がある種の条件を満たしているとき, （適当な意味で）パラメータ q の 1 における極限を考えることで, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群 $\overline{V}$ が得られる。これを V の**古典極限**と呼ぶ。古典極限 $\overline{V}$ は元の加群 V の構造に関して様々な情報を持っており, $\overline{V}$ を調べることで V の構造に関する多くの知見が得られる。また $\overline{V}$ は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群であることから, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群である V に比べて扱いが容易な点も多い。そのため $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群に対しその古典極限を調べることは, 重要な問題である。

よく知られているように, 量子ループ代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は Hopf 代数の構造を持つ。そのため, 有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 $V_1,\dots,V_p$ が与えられたとき, これらのテンソル積 $V_1\otimes\cdots\otimes V_p$ はやはり有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群となる。よって適当な条件下では, その古典極限 $\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}$ を考えることが出来る。一方各古典極限 $\overline{V_1},\dots,\overline{V_p}$ は Lie 代数 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 上の加群であるから,

*1 $\mathbb{C}(q)$ は q を変数とする有理関数体を表す。

これらのテンソル積 $\overline{V_1}\otimes\cdots\otimes\overline{V_p}$ もやはり $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群となる。このとき, これら二つの $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群 $\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}$ と $\overline{V_1}\otimes\cdots\otimes\overline{V_p}$ はいかにも同型となりそうであるが、実はこれは正しくない。すなわち, テンソル積を取る操作と古典極限を取る操作は可換ではないのである。ではテンソル積の古典極限 $\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}$ と各々の古典極限 $\overline{V_1},\dots,\overline{V_p}$ との関係は, どのように記述されるのであろうか？これが, 本稿で考えたい問題である。

次章では何故二つの加群が同型とならないのか, その理由について述べた後, 各 V_k が単純加群の場合に上で述べた問題に関するある予想を紹介する。正確な主張は次章で述べるが, 一言で言えば「$\overline{V_1}\otimes\cdots\otimes\overline{V_p}$ のテンソル積を "フュージョン積"に取り替えると, $\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}$ と同型となる」という予想である。ここでフュージョン積とは, Feigin-Loktev により [FL99] において定義された, テンソル積のある種の変形である。

この予想を, 各 $V_1,\dots,V_p$ が Kirillov-Reshetikhin 加群の場合に証明した, というのが [Nao16] の主定理である。3 章ではこの主定理の正確な主張について紹介する。ただし, 証明には一切触れない。

2 テンソル積の古典極限 vs 古典極限のテンソル積

2.1 記号の準備

$\mathfrak{g}$ のランクを n とし, $\mathfrak{g}$ の単純ルートの添え字集合を $I=\{1,\dots,n\}$ とする。このとき $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $x_{i,r}^{\pm}$ $(i\in I,\ r\in\mathbb{Z})$, $k_i^{\pm1}$ $(i\in I)$, $h_{i,m}$ $(i\in I,\ m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ により生成される $\mathbb{C}(q)$-代数である [CP94, Section 12.2][*2]。

以下, 本稿に現れるすべての $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群は 1 型であると仮定する[*3]。三角分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ に対応して, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)$, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})$, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{n}_+)$ が定義される。$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 V が **$\boldsymbol{\ell}$-最高ウェイト加群**であるとは, あるベクトル $v\in V$ (**$\boldsymbol{\ell}$-最高ウェイトベクトル**と呼ばれる) が存在して,

$$x_{i,r}^{+}v=0\ \ ({}^{\forall}i,{}^{\forall}r),\quad U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})v=\mathbb{C}(q)v,\quad U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})v=V$$

を満たすことである。例えば有限次元単純 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群は, すべて ℓ-最高ウェイト加群である。定義から, ℓ-最高ウェイト加群 V の ℓ-最高ウェイトベクトル v は, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})$ の同時

[*2] 記号は [Nao16] に従っており [CP94] のものとは少し異なる。また [CP94] で与えられているのは量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定義関係式であるので, 量子ループ代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義関係式を得るには $\mathcal{C}^{1/2}=1$ という関係式をさらに加える必要がある。

[*3] $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群に k_i $(i\in I)$ が半単純に作用し, またそのすべての固有値が q のべきであるとき, その加群は 1 型であるという。1 型の加群に議論を限定しても, 特に一般性は失われない。

固有ベクトルとなる。このとき V が有限次元であるならば, ある手続きによりこの同時固有値に対し, 定数項が 1 の多項式の n 個の列 $\boldsymbol{\pi} = \big(\boldsymbol{\pi}_1(u), \ldots, \boldsymbol{\pi}_n(u)\big)$ ($\boldsymbol{\pi}_i(u) \in \mathbb{C}(q)[u]$, $\boldsymbol{\pi}_i(0) = 1$) を対応させせることが出来る [CP95]。この $\boldsymbol{\pi}$ を有限次元 ℓ-最高ウェイト加群 V の **Drinfeld 多項式**と呼ぶ。Drinfeld 多項式と有限次元単純 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群は上の対応により一対一に対応する。以下 $\boldsymbol{\pi}$ に対応する単純加群を $L(\boldsymbol{\pi})$ と表す。

命題 2.1. 単純加群のテンソル積 $L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)$ が ℓ-最高ウェイト加群であるとき, その Drinfeld 多項式は $\prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{\pi}^k$ となる。ただし積は項ごとの積で定義する。

2.2 古典極限

本節では古典極限の正確な定義について述べる。$\mathbb{C}(q)$ の局所部分環 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{f(q)/g(q) \mid f(q), g(q) \in \mathbb{C}[q], g(1) \neq 0\}$ と定める[*4]。このとき, 生成元 $x_{i,r}^{\pm}$, $k_i^{\pm 1}$, $h_{i,m}$ から生成される $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の $\mathcal{A}$-部分代数を $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ と表す[*5]と, $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の $\mathcal{A}$-格子[*6]であり, かつ自然な $\mathbb{C}$-代数の全射準同型 $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow U(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ が存在する。またこの射の核は $\{k_i \otimes 1 - 1 \otimes 1 \mid i \in I\}$ で生成される両側イデアルである。

V を $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群とし, L を V の $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-部分加群とする。このとき $L \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$ は上の準同型を介して $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群となる。ここでさらに L が V の $\mathcal{A}$-格子であるとき, $L \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$ は V の古典極限と呼ばれる。[*7]。以上の考察から, 古典極限を定義するには, $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-不変な $\mathcal{A}$-格子を構成すればよいことが分かる。この構成に関し, 以下が有用である。

補題 2.2 ([CP01], [Nao16, Lemma 2.6])**.** V を ℓ-最高ウェイト加群, v を ℓ-最高ウェイトベクトルとし, V の Drinfeld 多項式を $\boldsymbol{\pi} = \big(\boldsymbol{\pi}_1(u), \ldots, \boldsymbol{\pi}_n(u)\big)$ とする。このときすべての $i \in I$ に対し $\boldsymbol{\pi}_i(u) \in \mathcal{A}^{\times}[u]$ であるならば, $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v \subseteq V$ は $\mathcal{A}$-格子となる。

定義 2.3. V を有限次元 ℓ-最高ウェイト $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群, $v \in V$ をその ℓ-最高ウェイトベクトルとし, V の Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}$ が上の補題の仮定を満たすとする。このとき $\mathbf{L}\mathfrak{g}$-加群

[*4] 量子群の特殊化を考える場合 $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 上で考えることが多いが, 本稿では $q = 1$ における特殊化しか現れないので $\mathcal{A}$ 上で考えれば十分である。

[*5] これは Chevalley 生成元 E_i, F_i, k_i ($i \in I \cup \{0\}$) から生成される $\mathcal{A}$-部分代数と一致する [Nao16, Lemma 2.5]。

[*6] $\mathbb{C}(q)$-ベクトル空間 R の $\mathcal{A}$-部分加群 S が $\mathcal{A}$-格子であるとは, S が $\mathcal{A}$ 上自由であり, かつ $S \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}(q) \xrightarrow{\sim} R$ が成り立つことである。

[*7] L が V の $\mathcal{A}$ 格子でないと, 古典極限が満たすべき性質 (e.g., $\dim_{\mathbb{C}(q)} V = \dim_{\mathbb{C}} L \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$) を満たさなくなってしまう。例えば極端な例として $L = V$ とすると, $V \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C} = 0$ となる。

$\big(U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v\big) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$ を V の**古典極限**と呼び, $\overline{V}$ と表す。

このように, ℓ-最高ウェイト加群 (特に単純加群) に対しては, 十分多くの場合に古典極限が定義できる。一方で ℓ-最高ウェイト加群でない一般の加群に対して古典極限を自然に定義する方法は今のところ知られておらず, 今後の課題といえる。

2.3　二つの極限の比較

すべての多項式が $\mathcal{A}^{\times}[u]$ に属する Drinfeld 多項式の列 $\boldsymbol{\pi}^1, \dots, \boldsymbol{\pi}^p$ が与えられ, テンソル積 $L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)$ が ℓ-最高ウェイト加群であると仮定する。このとき各 $L(\boldsymbol{\pi}^k)$ の ℓ-最高ウェイトベクトルを v_k と表すと, テンソル積の古典極限は

$$\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)} = U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$$

と定義される。一方各古典極限 $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1)}, \dots, \overline{L(\boldsymbol{\pi}^p)}$ のテンソル積は,

$$\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1)} \otimes \cdots \otimes \overline{L(\boldsymbol{\pi}^p)} \cong \big(U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v_1 \otimes \cdots \otimes U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v_p\big) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}$$

を満たす。このように $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)}$ と $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1)} \otimes \cdots \otimes \overline{L(\boldsymbol{\pi}^p)}$ は, 定義に用いられる $\mathcal{A}$ 格子が異なることから必ずしも同型とならないのである。そこで本稿では, 導入でも述べたように, $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)}$ を各古典極限 $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^k)}$ を用いて実現するにはどうすればよいか, という問題を考えてみたい。

2.4　テンソル積の古典極限に関する予想

本節では, 前節で述べた問題に関するある予想を紹介する。そのためにまず, いくつか定義を述べる。

第一にフュージョン積の定義について思い出しておく。部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \subseteq \mathbf{L}\mathfrak{g}$ を**カレント代数**と呼ぶ。カレント代数, およびその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}[t])$ は多項式の次数により次数付き (Lie) 代数となる。$V_1, \dots, V_p$ を次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群とし, また各 V_k はすべて次数 0 の元 v_k で生成される一元生成加群であると仮定する。$c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ を相異なる複素数とし, $V_k^{c_k} := \varphi_{c_k}^* V_k$ で V_k の自己同型 $\varphi_{c_k} \colon \mathfrak{g}[t] \to \mathfrak{g}[t]$ に関する引き戻しを表す。ただし φ_c $(c \in \mathbb{C})$ は

$$\varphi_c \colon x \otimes f(t) \mapsto x \otimes f(t+c)$$

と定義する。このときこれらのテンソル積 $V := V_1^{c_1} \otimes \cdots \otimes V_p^{c_p}$ は $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ から生成される一元生成 $\mathfrak{g}[t]$ 加群となることが示される [FL99]。また V は次数付き加群ではな

いが,

$$V^{\leq k} = U(\mathfrak{g}[t])^{\leq k}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

によりフィルター付け $0 = V^{\leq -1} \subseteq V^{\leq 0} \subseteq \cdots \subseteq V^{\leq N} = V \ (N \gg 0)$ を与えることが出来る。このフィルター付けに付随する次数付き空間 $\bigoplus_k V^{\leq k}/V^{\leq k-1}$ は自然に次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となる。これを $V_1 * \cdots * V_p$ と表し, $V_1, \ldots, V_p$ の**フュージョン積**と呼ぶ。

続いて, 古典極限を少し変形することで得られる, 次数付き極限について思い出しておく。補題 2.2 の仮定を満たす有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 V が与えられ, その Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi} = \big(\boldsymbol{\pi}_1(u), \ldots, \boldsymbol{\pi}_n(u)\big)$ に対し, ある $c \in \mathbb{C}$ が存在して, すべての $i \in I$ で

$$\boldsymbol{\pi}_i(u)\Big|_{q=1} = (1-cu)^{\deg \boldsymbol{\pi}_i} \tag{2.1}$$

が成り立つと仮定する。このとき古典極限 $\overline{V}$ に対し,

$$\mathfrak{g} \otimes (t-c)^N \overline{V} = 0 \quad (N \gg 0) \tag{2.2}$$

が従う。$\overline{V}$ を制限により $\mathfrak{g}[t]$ 加群とみなし, それを φ_{-c} によって引き戻す事で得られる $\mathfrak{g}[t]$ 加群 $\varphi_{-c}^* \overline{V}$ を $\widehat{V}$ と表す。すると (2.2) より $\mathfrak{g} \otimes t^N \widehat{V} = 0 \ \ (N \gg 0)$ が成り立つ。

定義 2.4. $\widehat{V}$ が次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となるとき, $\widehat{V}$ を V の**次数付き極限**と呼ぶ。

どのような V に対し次数付き極限が定義できるか（すなわち $\widehat{V}$ が次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となるか）は今のところよく分かっていないが, 次数付き極限が定義できる例は数多く知られている[*8]。以下では, 上で述べた仮定を満たす加群 V については常に $\widehat{V}$ が次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となることを仮定し, そうならない加群については考えないこととする。

さて前節の設定に戻ろう。$\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^p$ は各多項式が $\mathcal{A}^\times[u]$ に属するとし, $L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)$ は ℓ-最高ウェイト加群であるとする。またさらに, ある $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在してすべての $1 \leq k \leq p$, $i \in I$ に対し,

$$\boldsymbol{\pi}_i^k(u)\Big|_{q=1} = (1-cu)^{\deg \boldsymbol{\pi}_i^k} \tag{2.3}$$

が成り立つと仮定する。このとき次数付き極限 $\big(L(\boldsymbol{\pi}^1) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)\big)^\wedge$ に対し, 以下の同型が成り立つことが期待される。

[*8] 本稿の主定理で扱う Kirillov-Reshetikhin 加群に対しては, 次数付き極限が定義できることが証明されている [CM06]。またより一般の単純加群のクラスである minimal affinization に対しても, 古典型および G_2 型の場合にはこれが証明されている [Nao13, Nao14, LN16]。

予想 2.5. $\mathfrak{g}[t]$ 加群として, 同型

$$\big(L(\boldsymbol{\pi}^1)\otimes\cdots\otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)\big)^{\widehat{}}\cong \widehat{L(\boldsymbol{\pi}^1)}*\cdots*\widehat{L(\boldsymbol{\pi}^p)}$$

が成り立つ。

実際いくつかの特別な場合にはこの同型が証明されている (補足 3.5 参照)[*9]。フュージョン積はもともと共形場理論における共形ブロックの次数付き類似として導入されたものであり, それが量子ループ代数の有限次元加群と関係づけられるという点で, 上の予想はそれなりに興味深いものであると考えている[*10]。

上の予想は (2.3) という特別な設定のもとでの主張であるが, この予想が示せれば, 一般の単純加群のテンソル積の古典極限に関する記述も得ることが出来る。このことについて説明しよう。まずよく知られた定理を一つ思い出しておく。1 次式の積で表される多項式 $f(u)=(1-a_1u)(1-a_2u)\cdots(1-a_pu)\in\mathbb{C}(q)[u]$ と剰余類 $\xi\in\mathbb{C}(q)^\times/q^{\mathbb{Z}}$ に対し,

$$[f(u)]_\xi=\prod_{a_j\in\xi}(1-a_ju)$$

と定める。また $\boldsymbol{\pi}=\big(\boldsymbol{\pi}_1(u),\dots,\boldsymbol{\pi}_n(u)\big)$ に対し, $[\boldsymbol{\pi}]_\xi=\big([\boldsymbol{\pi}_1(u)]_\xi,\dots,[\boldsymbol{\pi}_n(u)]_\xi\big)$ と表す。

定理 2.6 ([Her10, Theorem 4.6])**.** Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}$ の各 $\boldsymbol{\pi}_i(u)$ が, 1 次式の積に分解できると仮定する。このとき, 同型

$$L(\boldsymbol{\pi})\cong\bigotimes_{\xi\in\mathbb{C}(q)^\times/q^{\mathbb{Z}}}L([\boldsymbol{\pi}]_\xi)$$

が成り立つ。また右辺はテンソル積の順序によらない。

$\boldsymbol{\pi}^1,\dots,\boldsymbol{\pi}^p$ はすべての多項式が $\mathcal{A}^\times[u]$ に属しており, かつ $L(\boldsymbol{\pi}^1)\otimes\cdots\otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)$ が ℓ-最高ウェイト加群となるとする。また簡単のため, すべての多項式は 1 次式の積に分解できると仮定する[*11]。このとき上の定理から, (必要であれば) 各 $L(\boldsymbol{\pi}^k)$ をさらにテンソル積に分解してやることで, 各 $1\le k\le p$ に対し $c_k\in\mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\boldsymbol{\pi}_i^k(u)\Big|_{q=1}=(1-c_ku)^{\deg\boldsymbol{\pi}_i^k}\quad({}^\forall i\in I)$$

[*9] この予想は, 誰々によって提唱された, というよりは, いくつかの特別な場合で成り立つことが既に知られており, そこから自然と専門家たちの間で予想されるようになった, という類のものである。

[*10] 正直なところ, 完全に一般の仮定の下で上の同型が成り立つ, と期待する根拠は特にない。しかし, 少なくともある程度適切な仮定の下では成り立つであろう, と期待している。

[*11] 適当に体を拡大してやれば, 一般の場合でも同様の議論が可能であろうと思われる (ただしちゃんと検証したわけではない)。

となると仮定しても一般性を失わないことが分かる。このとき以下の命題が容易に示せる。

命題 2.7. $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群としての同型

$$\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1)\otimes\cdots\otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)} \cong \bigotimes_{c\in\mathbb{C}^\times}\overline{\bigotimes_{c_k=c} L(\boldsymbol{\pi}^k)}$$

が成り立つ。ただし二つ目のテンソル積は, $k<\ell$ ならば $L(\boldsymbol{\pi}^k)$ は $L(\boldsymbol{\pi}^\ell)$ より左に並べるものとする。

よって予想 2.5 が正しければ, 古典極限 $\overline{L(\boldsymbol{\pi}^1)\otimes\cdots\otimes L(\boldsymbol{\pi}^p)}$ は, フュージョン積のテンソル積

$$\bigotimes_{c\in\mathbb{C}^\times}\varphi_c^*\left(\mathop{\ast}_{c_k=c}\widehat{L(\boldsymbol{\pi}^k)}\right)$$

と ($\mathfrak{g}[t]$ 加群として) 同型となることが分かる。

3 主結果

[Nao16] の主結果は, 予想 2.5 を特別な場合に証明した, というものである。この結果を正確に述べて本稿を終えたいと思う。

$i\in I$, $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$, $a\in\mathbb{C}(q)^\times$ に対し, Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}_{i,\ell,a}$ を

$$\left(\boldsymbol{\pi}_{i,\ell,a}\right)_j(u) = \begin{cases}(1-au)(1-q^{2(\alpha_i,\alpha_i)}au)\cdots(1-q^{(2\ell-2)(\alpha_i,\alpha_i)}au) & (j=i)\\ 1 & (j\neq i)\end{cases}$$

と定める。ただし α_i は単純ルート, (,) はルート格子上の Weyl 群不変な $\mathbb{Z}$-値対称双線形形式とする。

定義 3.1. $\boldsymbol{\pi}_{i,\ell,a}$ に付随する単純加群 $L(\boldsymbol{\pi}_{i,\ell,a})$ を, **Kirillov-Reshetikhin** 加群と呼ぶ。

例 3.2 (A 型の Kirillov-Reshetikhin 加群)**.** まず各 $c\in\mathbb{C}^\times$ ごとに, Lie 代数の射 $\iota_c\colon \mathbf{L}\mathfrak{g}\twoheadrightarrow\mathfrak{g}$ が $\iota_c\big(x\otimes f(t)\big)=f(c)x$ により定義できることに注意する。 これを **evaluation** 写像と呼ぶ。以下, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{n+1}$ とする。このとき evaluation 写像の q 類似として, 各 $a\in\mathbb{C}(q)^\times$ ごとに代数の射 $\iota_a\colon U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\twoheadrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ が定義でき, Kirillov-Reshetikhin 加群 $L(\boldsymbol{\pi}_{i,\ell,a})$ は引き戻し $\iota_a^*V_q(\ell\varpi_i)$ と同型となることが知られている[*12]。ただし ϖ_i は基本ウェイト, $V_q(\mu)$

[*12] $\mathfrak{g}$ が A 型でないとき evaluation 写像の q-類似は存在せず, Kirillov-Reshetkin 加群をこのような形で実現することはできない。

は最高ウェイト μ の単純 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群を表す。

以下が, [Nao16] の主定理である。

定理 3.3 ([Nao16, Theorem 3.1])**.** Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積 $L(\boldsymbol{\pi}_{i_1,\ell_1,a_1}) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}_{i_p,\ell_p,a_p})$ に対し, 以下を仮定する。
(i) $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{A}^\times$ である。
(ii) $L(\boldsymbol{\pi}_{i_1,\ell_1,a_1}) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}_{i_p,\ell_p,a_p})$ は ℓ-最高ウェイト加群である。
(iii) $a_1(1) = \cdots = a_p(1) \in \mathbb{C}^\times$ である。
このとき, 予想 2.5 は正しい。すなわち同型

$$\bigl(L(\boldsymbol{\pi}_{i_1,\ell_1,a_1}) \otimes \cdots \otimes L(\boldsymbol{\pi}_{i_p,\ell_p,a_p})\bigr)\widehat{} \cong L(\boldsymbol{\pi}_{i_1,\ell_1,a_1})\widehat{} * \cdots * L(\boldsymbol{\pi}_{i_p,\ell_p,a_p})\widehat{}$$

が成り立つ。

補足 3.4. 仮定 (i), (ii) は, 各 $L(\boldsymbol{\pi}_{i_k,\ell_k,a_k})$, およびこれらのテンソル積に古典極限を定義するために必要な仮定である。また仮定 (iii) は, (2.3) がすべての k, i で成り立つことと同値である。

補足 3.5. 以下の場合には, [Nao16] の以前から定理 3.3 が証明されていた。
(i) $\ell_1 = \cdots = \ell_p = 1$ のとき (A 型: [CL06], ADE 型: [FL07], 一般: [Nao12])。
(ii) A 型で, $i_1 = \cdots = i_p$ かつ $a_1 = \cdots = a_p$ のとき [BP15]。
(iii) T 系と呼ばれる短完全列に現れる特別な Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積 [CV15]。

さらに [BCM15] では A 型の場合に, 有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の圏のある充満部分圏 $\mathcal{C}_1$ (cf. [HL10]) に属する単純加群に対し, 同様の結果を得ている。この結果は定理 3.3 には含まれておらず, 予想 2.5 がより一般の設定でも成り立つであろう, と期待する一つの根拠であるといえる。

謝辞

研究集会「第二回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory」において講演の機会を与えてくださった榎本直也先生および斉藤義久先生に, この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

[BCM15] M. Brito, V. Chari, and A. Moura. Demazure modules of level two and prime representations of quantum affine $\mathfrak{sl}_{n+1}$. *J. Inst. Math. Jussieu*, 31 pages, 2015.

[BP15] M. Brito and F. Pereira. Graded limits of simple tensor product of Kirillov-Reshetikhin modules for $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. *Comm. Algebra*, 44(10):4504–4518, 2016.

[CL06] V. Chari and S. Loktev. Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of $\mathfrak{sl}_{r+1}$. *Adv. Math.*, 207(2):928–960, 2006.

[CM06] V. Chari and A. Moura. The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras. *Comm. Math. Phys.*, 266(2):431–454, 2006.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CP95] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and their representations. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 59–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[CP01] V. Chari and A. Pressley. Weyl modules for classical and quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 5:191–223 (electronic), 2001.

[CV15] V. Chari and R. Venkatesh. Demazure modules, fusion products and Q-systems. *Comm. Math. Phys.*, 333(2):799–830, 2015.

[FL99] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FL07] G. Fourier and P. Littelmann. Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions. *Adv. Math.*, 211(2):566–593, 2007.

[Her10] D. Hernandez. Simple tensor products. *Invent. Math.*, 181(3):649–675, 2010.

[HL10] D. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154:265-341, 2010.

[LN16] J. R. Li and K. Naoi. Graded limits of minmal affinizations over the quantum loop algebra of type G_2. *Algebr. Represent. Theory*, 19(4):957-973, 2016.

[Nao12] K. Naoi. Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type. *Adv. Math.*, 229(2):875–934, 2012.

[Nao13] K. Naoi. Demazure modules and graded limits of minimal affinizations. *Represent. Theory*, 17:524–556, 2013.

[Nao14] K. Naoi. Graded limits of minimal affinizations in type D. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 047, 20 pages, 2014.

[Nao16] K. Naoi. Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products. to appear in *IMRN, 2016.*