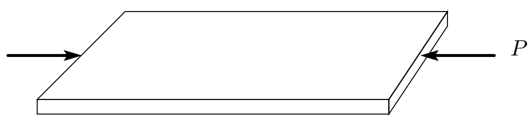
材料力学　演習（2007 年度 第 9 回）　配布 2007/12/21（金）　締切 1/11　提出［　　　］

クラス ☐　番号 ☐　氏 名 ☐　得点 ☐

注意： この用紙を表紙として，解答はレポート用紙を用いよ．問題は裏目にもある．

問 1　幅 10mm，厚さ 4mm，長さ 300mm の板に図のように面内の圧縮荷重を加える．材料の降伏応力を 200MPa，ヤング率を 200GPa とするとき，両端回転支持の場合の座屈荷重 P_{cr} と降伏荷重 P_Y の比 P_{cr}/P_Y を求めよ．



[**解答例**]

板の長さを L，幅を b，厚さを t とするとき，降伏荷重は

$$P_Y = \sigma_Y \cdot A, \qquad A = bt$$

であり，またオイラーの座屈荷重は，両端回転支持の場合，断面 2 次モーメントを I として

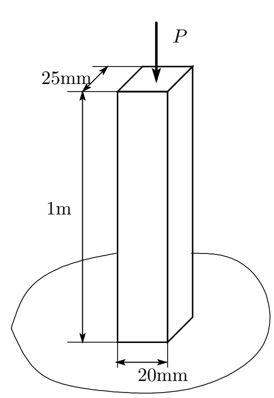
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}, \qquad I = \frac{bt^3}{12}$$

となる（断面 2 次モーメントの計算に注意！）．

したがって，

$$\frac{P_{cr}}{P_Y} = \frac{\pi^2 \frac{E}{L^2} \frac{bt^3}{12}}{\sigma_Y \cdot bt} = \frac{\pi^2}{12} \frac{Et^2}{\sigma_Y L^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{200 \times 1000 \times 4^2}{200 \times 300^2} \simeq 0.146$$

問 2　下端を固定支持された図の長柱の座屈荷重を求めよ．ヤング率を 200GPa とする．



[解答例]

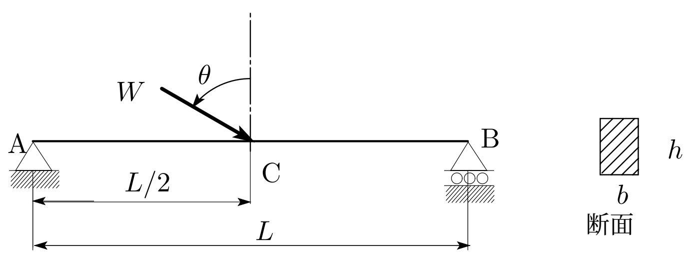
一端固定，他端自由の長柱のオイラーの座屈荷重 P_{cr} は，断面 2 次モーメントの小さい方の値を I として

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{L^2}, \qquad I = \frac{bh^3}{12}$$

したがって

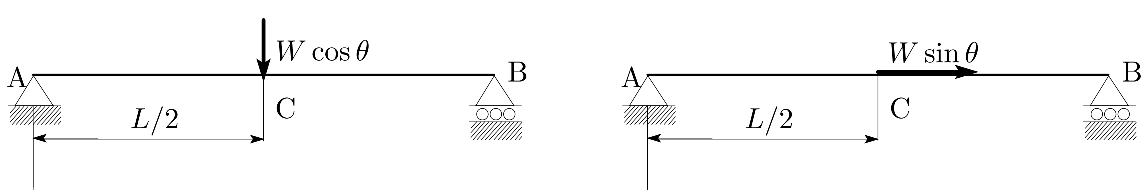
$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{Ebh^3}{12L^2} = \frac{\pi^2}{4}\frac{200 \times 1000 \times 25 \times 20^3}{12 \times 1000^2} \simeq 8.22 \times 10^3\,\mathrm{N} = 8.22\,\mathrm{kN}$$

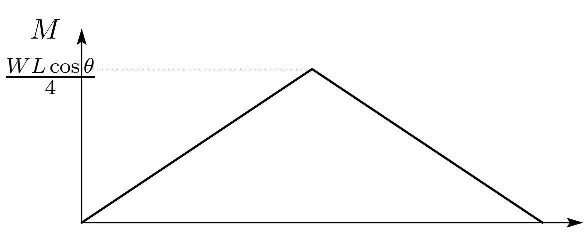
問 3　図のはりにおいて，曲げ引張側表面の応力を求め，その分布を図示せよ． ただし $W = 5\mathrm{kN}$, $L = 200\mathrm{mm}$，$\theta = 60°$，$b = 20\mathrm{mm}$，$h = 50\mathrm{mm}$ とする．



[解答例]

このはりは，図のように中央に垂直方向荷重 $W\cos\theta$ を受けるはりの曲げと，水平方向荷重 $W\sin\theta$ をうける引張の問題の重ねあわせとして考えることができる．





曲げモーメントの分布

引張応力の分布

曲げモーメント M の分布は

$$\begin{aligned} &0 < x < L/2 \text{ で} \quad M(x) = \tfrac{W\cos\theta}{2}x, \\ &L/2 < x < L \text{ で} \quad M(x) = \tfrac{W\cos\theta}{2}x - W\cos\theta\left(x - \tfrac{L}{2}\right) = \tfrac{W\cos\theta}{2}(L - x) \end{aligned}$$

となる．また表面の曲げによる引張応力は，断面係数を Z として

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{Z}$$

と与えられるので，曲げ応力の分布は

$$0 < x < L/2 \text{ で} \quad \sigma(x) = \frac{W\cos\theta}{2Z}x$$

$$L/2 < x < L \text{ で} \quad \sigma(x) = \frac{W\cos\theta}{2Z}(L - x)$$

となる．

一方，引張荷重 $W\sin\theta$ による応力は断面積を A として

$$0 < x < L/2 \text{ で} \quad \sigma(x) = \frac{W\sin\theta}{A}$$

$$0 < x < L/2 \text{ で} \quad \sigma(x) = 0$$

である．

したがって両者を重ね合わせて

$$0 < x < L/2 \text{ で} \quad \sigma(x) = \frac{W\cos\theta}{2Z}x + \frac{W\sin\theta}{A}$$

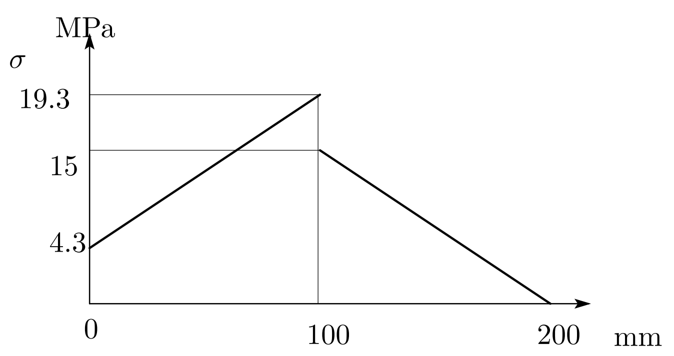
$$L/2 < x < L \text{ で} \quad \sigma(x) = \frac{W\cos\theta}{2Z}(L - x)$$

与えられた数値を代入すれば

$$0 < x < L/2 \text{ で} \quad \sigma(x) = 0.15x + 4.33$$

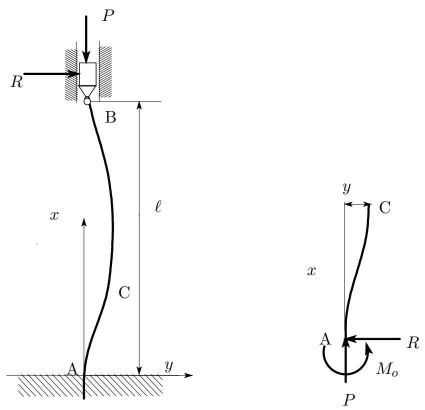
$$L/2 < x < L \text{ で} \quad \sigma(x) = 30 - 0.15x \qquad \text{（単位は MPa）}$$

となり，以下の図が得られる．



引張応力の分布

問 4　図 (a) の長さ ℓ の長柱の座屈について考える．ヤング率，断面 2 次モーメントをそれぞれ E，I とする．以下の文章を**参考にして**座屈荷重を求めよ．



(a)　(b)

[**解答例**]

点 A は固定端であり，点 B は回転端でかつ x 方向に拘束されている．一般に端点 A では図 (b) のように垂直方向反力 P と水平方向反力 R，曲げモーメント M_o が働く．点 A から距離 x の位置で y だけたわんだ状態での点 C における曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \boxed{Py + R_A x - M_o}$$

と表される．たわみの基礎微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \boxed{-\frac{M}{EI}}$$

にこの曲げモーメントを代入して

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \boxed{\frac{M_o}{EI} - \frac{R_A}{EI}} \tag{1}$$

ここで

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

と置いた．さらに，

$$C = \frac{M_o}{P} \quad , \quad D = -\frac{R}{P}$$

と置くと，式 (1) は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \boxed{\alpha^2 C + \alpha^2 D x} \tag{2}$$

と書き表される．この微分方程式の解は

$$y(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \boxed{C + Dx} \tag{3}$$

である．これより

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\alpha A\cos\alpha x - B\sin\alpha x + D} \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \boxed{-\alpha^2 A\sin\alpha x - \alpha^2 B\cos\alpha x} \tag{5}$$

となる．

つぎに境界条件を考える．

1. 点 A は固定端であるから

   $x = 0$　で　$\boxed{y = 0}$

   かつ

   $x = 0$　で　$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$

   これらより

   （イ）　$\boxed{B + C} = 0$

   （ロ）　$\boxed{\alpha A + D} = 0$

2. 点 B ではたわみが 0 でかつ回転端でモーメントが 0 であるから

   $x = \ell$　で　$\boxed{y = 0}$

   これより

   （ハ）　$\boxed{A\sin\alpha\ell + B\cos\alpha\ell + C + D\ell} = 0$

   また

   $x = \ell$　で　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{M}{EI} = 0$

   これより

   （ニ）　$\boxed{-\alpha^2 A\sin\alpha\ell - \alpha^2 B\cos\alpha\ell} = 0$

を得る．

（ニ）から，$\alpha^2 \neq 0$ を考慮して

$$\boxed{A\sin\alpha\ell + B\cos\alpha\ell} = 0$$

となり，

$$\frac{B}{A} = \boxed{-\tan\alpha\ell}$$

を得る．

また（ニ）を（ハ）に代入すれば

$$\boxed{C + D\ell} = 0$$

上式に（イ）（ロ）を用いれば

$$\alpha\ell = \boxed{-\frac{B}{A}}$$

となるので，結局

$$\boxed{\tan\alpha\ell} = \alpha\ell$$

を得る．これは超越方程式であり正の最小の解は

$$\alpha\ell \cong 4.4934$$

と与えられる．

したがって座屈を生じる最小の荷重

$$P = \boxed{EI\alpha^2 = EI\tfrac{4.4934}{\ell^2}}$$

を得る．座屈荷重を与える一般の式

$$P = C_0 EI\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \quad , \quad C_0\text{: 端末係数}$$

の形に表すと，

$$C_0 = \boxed{\left(\tfrac{4.4934}{\pi}\right)^2 = 2.046}$$

となる．