材料力学　演習（2007年度 第8回）

配布 2007/12/07（金）　締切 12/14　提出［　　］

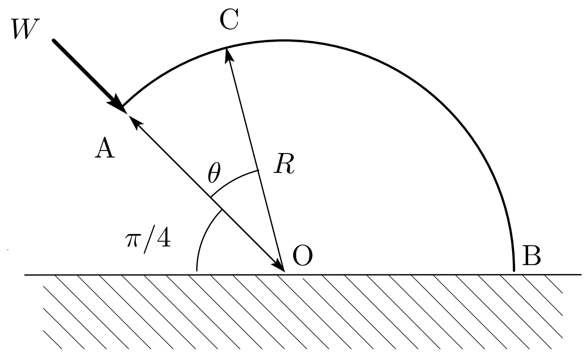
クラス [　] 番号 [　] 氏名 [　] 得点 [　]

注意： この用紙を表紙として，解答はレポート用紙を用いよ．裏面にも問題有．

下記の問において，いずれも各はりの断面は一様で，ヤング率，断面2次モーメントはそれぞれ E，I とする．

問1　図の曲がりはりについて以下の問いに答えよ．

1. 点Cのモーメント M を，角度 θ，荷重 W，半径 R を用いてあらわせ．
2. 点Aの荷重方向の変位をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．



[**解答例**]

1. 図1のように点Aから角度 θ の点Cにおける曲げモーメントを考える．円弧AB部分の自由物体線図についてモーメントの釣り合いを考えると，点Cにおける曲げモーメント M は

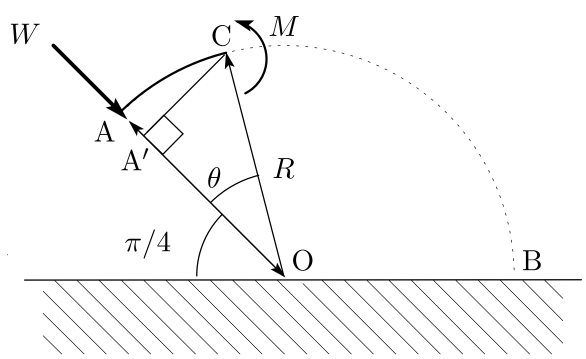


図1: モーメントのつりあい

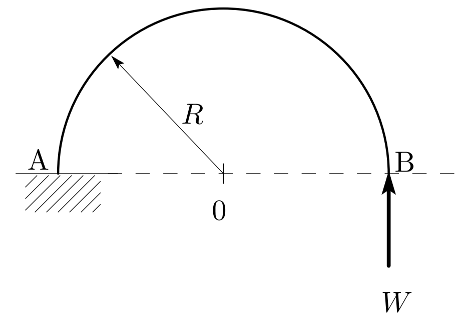
$$M(\theta) = -W \times \overline{A'C} = -W \times \overline{OC} \times \sin\theta = -W\,R\,\sin\theta$$

2. 点Aの荷重方向の変位を δ とすると，カスティリアーノの定理から

$$\delta \;=\; \frac{\partial U}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial W}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{M^2}{2EI}\,R\,d\theta\right\}$$

$$
\begin{aligned}
EI\delta &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} M \frac{\partial M}{\partial W}\, R\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} WR\sin\theta \cdot R\,\sin\theta \cdot R\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} WR^3 \sin^2\theta\, d\theta \;=\; \frac{WR^3}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{WR^3}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\,\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \;=\; \frac{WR^3}{2}\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) \\
\delta &= \frac{3\pi + 2}{8}\,\frac{WR^3}{EI}
\end{aligned}
$$

問 2　図のような集中荷重 W を受ける半円弧状のはり（半径 R ）について考える．以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．



1. カスティリアーの定理を用いて点 B の垂直方向の変位量を求めよ．
2. カスティリアーの定理を用いて点 B の水平方向の変位量を求めよ．

[**解答例**]

1. 図 2 のように点 A から角度 θ の点 C における曲げモーメントを考える．

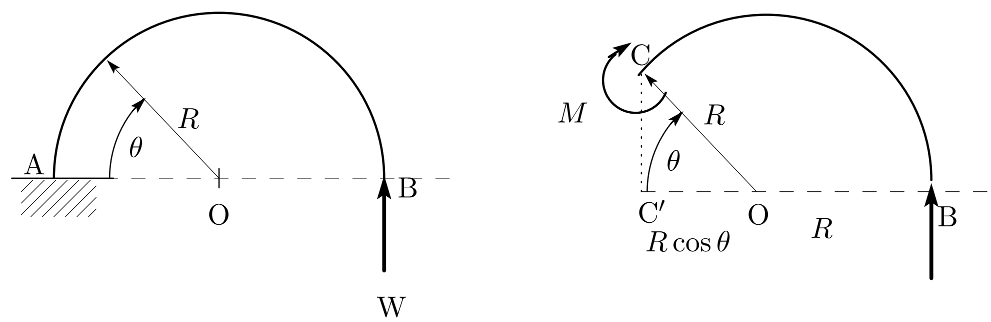


図 2: モーメントのつりあい

円弧 CB 部分の自由物体線図についてモーメントの釣り合いを考えると，点 C における曲げモーメント M は

$$M(\theta) = W \times \overline{C'B} = W \times (\overline{C'O} + \overline{OB}) = WR(1 + \cos\theta)$$

と与えられる．カスティリアーノの定理を適用すると，B 点の荷重 W 方向の変位（垂直変位）δ_V は

$$\delta_V = \frac{\partial U}{\partial W} = \int_0^{\pi} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W} R\,d\theta \qquad , \qquad \frac{\partial M}{\partial W} = R(1 + \cos\theta)$$

と与えられる．したがって以下の様に垂直変位が求められる．

$$\begin{aligned}
EI\,\delta_V &= \int_0^{\pi} WR(1+\cos\theta)\cdot R(1+\cos\theta)\,R\,d\theta \;=\; WR^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= WR^3\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = WR^3\int_0^{\pi}\left\{1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\} d\theta \\
&= WR^3\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\
&= WR^3\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}WR^3 \\
\delta_V &= \frac{3\pi}{2}\frac{WR^3}{EI}
\end{aligned}$$

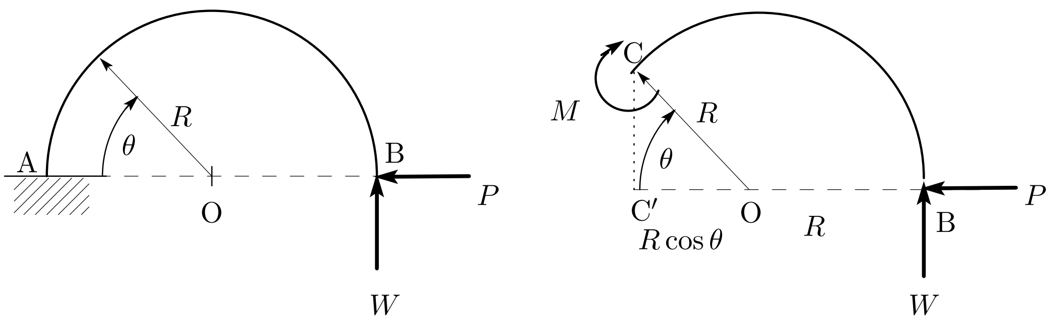


図 3: 仮想荷重を加えた場合のモーメントのつりあい

2. 図 3 のように，水平方向の荷重 P が B 点に加わっていると仮定する．

前問と同様にモーメントの釣り合いを考えると，点 C における曲げモーメント M は，荷重 W によるモーメントに加えて，仮想荷重 P によるモーメントを考慮して

$$M(\theta) = WR(1+\cos\theta) - P \times \overline{CC'} = WR(1+\cos\theta) - PR\sin\theta$$

と与えられる．カスティリアーノの定理を適用すると，B 点の仮想荷重 P 方向の変位（水平変位）δ_H は

$$\delta_H = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^\pi \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,R\,d\theta \qquad , \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -R\sin\theta$$

と与えられる．したがって以下の様に荷重 P による水平変位が求められる．

$$\begin{aligned} EI\,\delta_H &= \int_0^\pi \{WR(1+\cos\theta) - PR\sin\theta\}\cdot R(-R\sin\theta)\,R\,d\theta \\ &= R^3\int_0^\pi \left\{-WP(1+\cos\theta)\sin\theta + P\sin^2\theta\right\}\,d\theta \end{aligned}$$

$P=0$ の状態を考えれば，　　実際の水平方向変位は

$$\begin{aligned} EI\,\delta_H|_{P=0} &= -WR^3\int_0^\pi (1+\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = WR^3\int_0^\pi (\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= -WR^3\int_0^\pi \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\,d\theta \\ &= -WR^3\left[-\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^\pi = -2WR^3 \\ \delta_H &= -\frac{2WR^3}{EI} \end{aligned}$$

と求められる．ここで符号が–であるのは，実際の変位が，仮定した荷重の方向とは逆であることを示している（実際には，B が円弧の外側になるような変形となる）．

別解　図 4 のように点 B から角度 θ の点 C における曲げモーメント M を考える．また水平方向の荷重 Q が B 点に図のように加わっていると仮定する（前問とは角度の取り方，仮想荷重の方向が異なることに注意）．

円弧 BC 部分についてモーメントの釣り合いを考えると，点 C における曲げモーメント M は，荷重 W によるモーメントと仮想荷重 Q によるモーメントを考慮して

$$M(\theta) = W \times \overline{BC'} + Q \times \overline{CC'} = W \times (\overline{OB} - \overline{OC'}) + Q \times \overline{CC'} = WR(1-\cos\theta) + QR\sin\theta$$

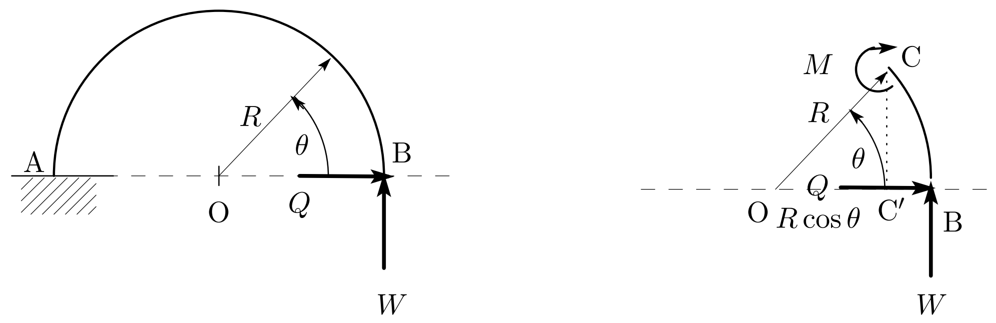


図 4: 別解

となる．

したがってこの円弧全体に蓄えられるひずみエネルギ U は，以下の様になる．

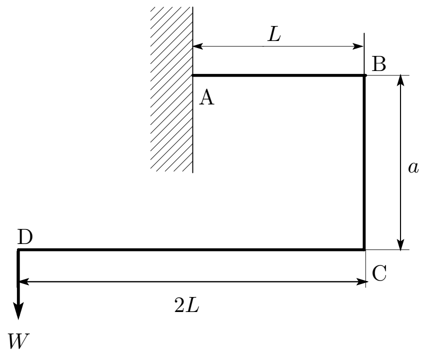
$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^{\pi} \frac{M^2}{2EI} R d\theta \\
2EI\,U &= \int_0^{\pi} \{WR(1-\cos\theta) + QR\sin\theta\}^2 \ Rd\theta = R^3 \int_0^{\pi} \{W(1-\cos\theta) + Q\sin\theta\}^2 \ d\theta \\
&= R^3 \int_0^{\pi} \left\{W^2(1-\cos\theta)^2 + 2QW(1-\cos\theta)\sin\theta + Q^2\sin^2\theta\right\} \ d\theta \\
&= R^3 \int_0^{\pi} \left\{W^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) + QW(2\sin\theta - \sin 2\theta) + \frac{Q^2}{2}(1-\cos 2\theta)\right\} \ d\theta \\
&= R^3 \left[W^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + QW\left(-2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) + \frac{Q^2}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\pi} \\
&= R^3 \left(\frac{3}{2}\pi W^2 + 4WQ + \frac{1}{2}\pi Q^2\right) \\
U &= \frac{R^3}{2EI}\left(\frac{3}{2}\pi W^2 + 4WQ + \frac{1}{2}\pi Q^2\right)
\end{aligned}
$$

カスティリアーノの定理を適用すると，B 点の荷重 W 方向変位（垂直変位）δ_V，仮想荷重 Q 方向の変位（水平変位）δ_H はそれぞれ，Q を 0 として

$$
\begin{aligned}
\delta_V &= \left.\frac{\partial U}{\partial W}\right|_{Q=0} = \left.\frac{R^3}{2EI}(3\pi W + 4Q)\right|_{Q=0} = \frac{3\pi W R^3}{2EI} \\
\delta_H &= \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \left.\frac{R^3}{2EI}(4W + \pi Q)\right|_{Q=0} = \frac{2WR^3}{EI}
\end{aligned}
$$

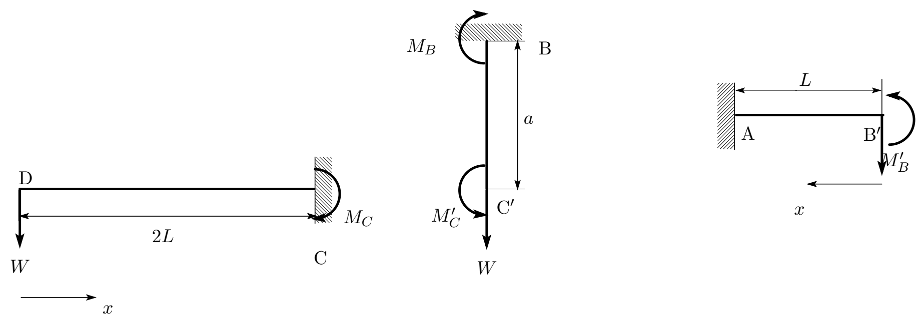
と求めることができる．

問 3　図のはりにおいて，D 点の垂直方向の変位 δ_D と，B 点の垂直方向変位 δ_B をカスティリアーノの定理を用いてそれぞれ求めよ．ただし軸力による変形は無視できるとする．



[解答例]

図の様に，はりの 3 つの部分に分けて考える．



DC 間について考える．

DC 間の曲げモーメントの分布 M_1 は

$$M_1 = -Wx$$

したがってこの区間の曲げによるひずみエネルギ U_1 は

$$U_1 = \int_0^{2L} \frac{M_1^2}{2EI} dx$$

C 点の反モーメント M_C は

$$M_C = W \cdot 2L = 2WL$$

C′B 間について考える．点 C′ に働くモーメント M'_C の大きさは M_C に等しく，荷重 W は曲げには寄与しないから，この区間の曲げモーメントの分布 M_2 は

$$M_2 = M'_C = 2WL$$

と一定の曲げモーメントとなる．この区間の曲げによるひずみエネルギ U_2 は

$$U_2 = \int_0^{a} \frac{M_2^2}{2EI} dx$$

点 B における反モーメント M_B は

$$M_B = M'_C = 2WL$$

AB$'$ 間について考える．点 B$'$ に働くモーメント M'_B の大きさは M_B に等しく，かつ荷重 W が鉛直方向に働くのでこの区間の曲げモーメントの分布 M_3 は，図の様に x 軸をとると

$$M_3 = -Wx + M'_B = -Wx + 2WL$$

と表される．この区間の曲げによるひずみエネルギ U_3 は

$$U_3 = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI} dx$$

したがってはり全体に蓄えられるひずみエネルギ U は

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

となり，点 D の垂直方向変位 δ_D はカスティリアーノの定理を用いて

$$\begin{aligned}
\delta_D = \frac{\partial U}{\partial W} &= \frac{\partial U_1}{\partial W} + \frac{\partial U_2}{\partial W} + \frac{\partial U_3}{\partial W} \\
&= \frac{\partial}{\partial W}\int_0^{2L} \frac{M_1^2}{2EI}\,dx + \frac{\partial}{\partial W}\int_0^{a} \frac{M_2^2}{2EI}\,dx + \frac{\partial}{\partial W}\int_0^{L} \frac{M_3^2}{2EI}\,dx \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^{2L} M_1\frac{\partial M_1}{\partial W}\,dx + \int_0^{a} M_2\frac{\partial M_2}{\partial W}\,dx + \int_0^{L} M_3\frac{\partial M_3}{\partial W}\,dx\right) \\
EI\,\delta_D &= \int_0^{2L} (-Wx)(-x)\,dx + \int_0^{a} 2WL\cdot 2L\,dx + \int_0^{L} (-Wx+2WL)(-x+2L)\,dx \\
&= \int_0^{2L} Wx^2\,dx + 4WL^2\int_0^{a} dx + \int_0^{L} W(x-2L)^2\,dx \\
&= \left[\frac{W}{3}x^3\right]_0^{2L} + 4WL^2a + \left[\frac{W}{3}(x-2L)^3\right]_0^{L} \\
&= \frac{8}{3}WL^3 + 4WL^2a + \frac{7}{3}WL^3 = 5WL^3 + 4WL^2a \\
\delta_D &= \frac{WL^2}{EI}(5L+4a)
\end{aligned}$$

点 B の垂直方向変位 δ_B を求めるため，点 B に図の様に垂直方向の荷重 P が加わると仮定する．

これによって曲げモーメントが変化するのは AB 間のみであり，この区間の曲げモーメントの分布 M_3 は，図の様に x 軸をとると

$$M_3 = -(W+P)x + 2WL$$

となる．

カスティリアーノの定理を用いて δ_B は

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U_1}{\partial P} + \frac{\partial U_2}{\partial P} + \frac{\partial U_3}{\partial P}$$

と求められるが，CD 間，BC 間のひずみエネルギは荷重 P には依存しないので，

$$\delta_B = \frac{\partial U_3}{\partial P}$$

となる．したがって

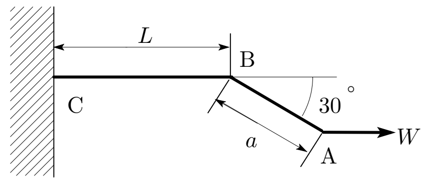
$$\begin{aligned}
\delta_B &= \frac{\partial U_3}{\partial P} = \int_0^L \frac{M_3}{EI}\frac{\partial M_3}{\partial P}\,dx \\
EI\,\delta_B &= \int_0^L \{-(W+P)x + 2WL\}\,(-x)\,dx \\
&= \int_0^L \Big\{(W+P)x^2 + 2WLx\Big\}\,dx \\
&= (W+P)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L - WL\Big[x^2\Big]_0^L \\
&= (W+P)\frac{L^3}{3} - WL^3 = -\frac{2}{3}WL^3 + \frac{1}{3}PL^3
\end{aligned}$$

となり，P を 0 とすると

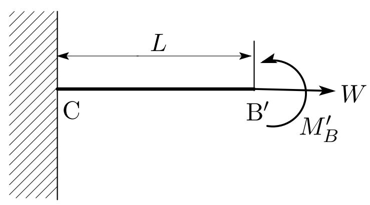
$$\delta_B = -\frac{2}{3}\frac{WL^3}{EI}$$

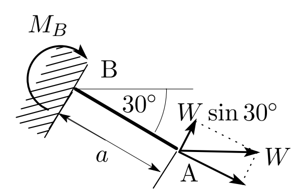
を得る．

問 4　図のはりにおいて，A 点の水平方向の変位 δ をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．ただし軸力による変形は無視できるとする．



[**解答例**]



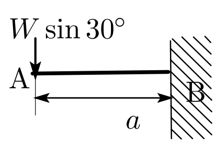


上図のように，2 つの部分に分けて考える．AB 間について，軸力 $W\cos 30°$ は無視できるから，集中荷重 $W\sin 30°$ を受ける片持ちはりと考えられる．また点 B の反モーメント M_B は

$$M_B = W\sin 30° \cdot a$$

となる．

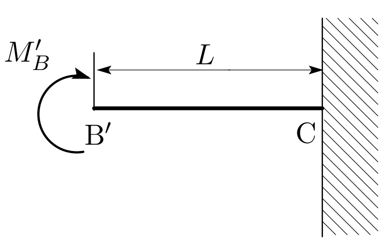
BC 間についても軸力を無視すると，モーメント M'_B が加わる片持ちはりと考えることができる．モーメント $M'_B = M_B$ であるから，結局左図 (1)(2) のような二つのはりに蓄えられるひずみエネルギを求めてカスティリアーノの定理を適用すればよい．(1) の曲げモーメントの分布は



(1)

$$M_1(x) = -W\sin 30° \cdot x$$

また (2) の曲げモーメントの分布は



(2)

$$M_2(x) = M'_B = W\sin 30° \cdot a$$

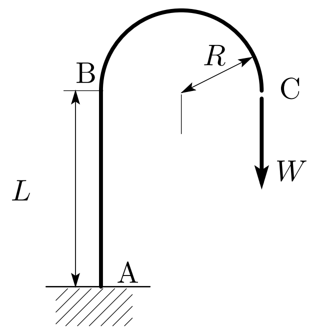
であるから，カスティリアーノの定理を用いて点 A の水平方向変位 δ_H は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} \delta_H &= \frac{\partial U}{\partial W} = \frac{\partial U_1}{\partial W} + \frac{\partial U_2}{\partial W} \\ &= \int_0^a \frac{M_1}{EI}\frac{\partial M_1}{\partial W}\,dx + \int_0^L \frac{M_2}{EI}\frac{\partial M_2}{\partial W}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI\delta_H &= \int_0^a (-W\sin 30° \cdot x)(-\sin 30° \cdot x)\,dx + \int_0^L (W\sin 30° \cdot a)\cdot(\sin 30° \cdot a)\,dx \\ &= W\sin^2 30° \int_0^a x^2\,dx + W\sin^2 30° \cdot a^2 \int_0^L dx \end{aligned}$$

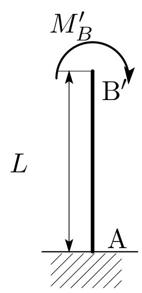
$$
\begin{aligned}
&= W \sin^2 30^\circ \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a + W \sin^2 30^\circ \cdot a^2 L \\
&= W \sin^2 30^\circ \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2 L\right) = W (a \sin 30^\circ)^2 \left(\frac{1}{3}a + L\right) \\
\delta_H &= \frac{Wa^2}{4EI}\left(\frac{1}{3}a + L\right)
\end{aligned}
$$

問 5　図のはりにおいて，C 点の荷重方向の変位 δ をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．ただし軸力による変形は無視できるとする．

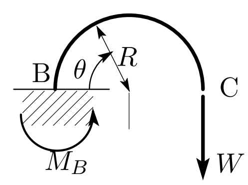


[**解答例**]

下図のように 2 つの部分に分けて考える．



(1)



(2)

BC 間のモーメントの分布は，図の様に角 θ をとると $(0 < \theta < \pi)$，問 2 と同様に考えて

$$M_1(\theta) = -WR(1 + \cos\theta)$$

となる．

また AB 間については，点 B にモーメント M'_B が加わるだけなので

$$M_2(x) = M'_B = -2WR$$

したがって，C 点の荷重方向変位 δ はカスティリアーノの定理を用いて

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\partial U}{\partial W} = \int_0^\pi \frac{M_1}{EI}\frac{\partial M_1}{\partial W}\,Rd\theta + \int_0^L \frac{M_2}{EI}\frac{\partial M_2}{\partial W}\,dx \\
EI\delta &= \int_0^\pi WR^2(1+\cos\theta)^2\,Rd\theta + \int_0^L (-2WR)(-2R)\,dx \\
&= WR^3\int_0^\pi (1+\cos\theta)^2\,d\theta + 4WR^2\int_0^L dx \\
&= \frac{3\pi}{2}WR^3 + 4WR^2L \\
\delta &= \frac{WR^2}{EI}\left(\frac{3\pi R}{2} + 4L\right)
\end{aligned}$$