材料力学　演習（2007年度 第5回） 解答例

問1　図1(a)(b) の様に同一材料でできた二種類の丸棒がある（ヤング率 E とする）．同じ引張荷重に対して

1. それぞれの丸棒に蓄えられるひずみエネルギ U_a，U_b を求めよ．
2. $D = 2d$ の場合にひずみエネルギ U_a，U_b の比を求めよ．

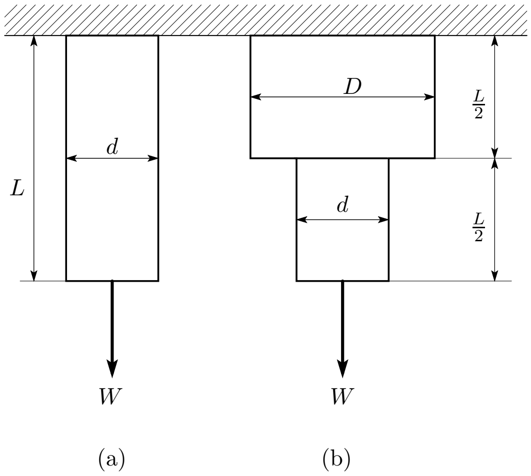

図 1: 2 種類の丸棒の引張

$\boxed{\text{解答例}}$

1. 長さ L，直径 d の丸棒が引張荷重 W を受けるときに蓄えられるひずみエネルギ U_a は，丸棒の体積を V とすると，単位体積あたりのひずみエネルギが $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ であるから

$$
\begin{aligned}
U_a &= \frac{1}{2}\sigma\varepsilon V = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V = \frac{1}{2}\frac{W^2}{EA^2}AL \\
&= \frac{1}{2}\frac{L}{EA}W^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{E\frac{\pi d^2}{4}}W^2 = \frac{2LW^2}{\pi E d^2}
\end{aligned}
$$

(b) の段付き棒は，長さ $L/2$，直径 d の丸棒と，長さ $L/2$，直径 D の丸棒が直列になっており，それぞれに働く荷重は W なので，それぞれのひずみエネルギを求めて足し合わせれば全体のひずみエネルギ U_b が得られる．

$$
\begin{aligned}
U_b &= \frac{2(L/2)}{\pi E d^2}W^2 + \frac{2(L/2)}{\pi E D^2}W^2 \\
&= \frac{LW^2}{\pi E}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{D^2}\right)
\end{aligned}
$$

2. 上式で $D = 2d$ とすると

$$
U_b = \frac{LW^2}{\pi E}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{(2d)^2}\right) = \frac{5LW^2}{4\pi d^2 E}
$$

したがって

$$
\frac{U_b}{U_a} = \frac{\frac{5LW^2}{4\pi d^2 E}}{\frac{2LW^2}{\pi E d^2}} = \frac{5}{8}
$$

問 2　図 2 に示すように，断面積 A =500mm^2，長さ L =500mm の鋼棒にそって質量 M =1kg の重りを h =200mm の高さから落下させてストッパーに衝突させた．棒に生じる応力 σ_{dy}[MPa] と伸び δ[mm] を求めよ．また，ストッパーにこの重りを静かに載せた場合の応力 σ_{st} との比を求めよ．ただしヤング率 E =206GPa とする．

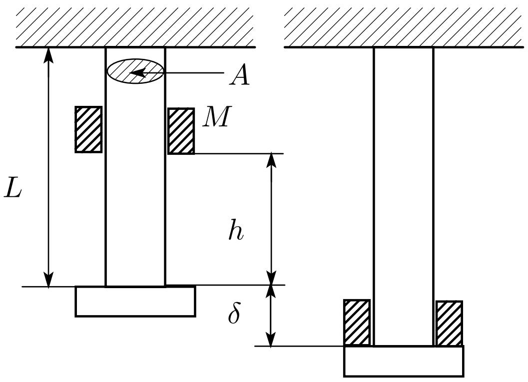

図 2. 丸棒の衝撃引張

解答例

$h+\delta$ 落下した時の位置のエネルギの変化が，δ 伸びた棒のひずみエネルギと等しいので，重力加速度を g として

$$Mg(h+\delta) = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\delta^2$$

が成り立つ．これより

$$\delta^2 - \frac{2LMg}{AE}\delta - \frac{2LMg}{AE}h = 0 \tag{1}$$

一方，静的に力 Mg が加わった場合の応力を σ_{st}，伸びを δ_{st} とすると，

$$\sigma_{st} = \frac{Mg}{A} \quad , \qquad \delta_{st} = \frac{\sigma_{st}}{E}L = \frac{MgL}{AE}$$

であるので， 式（1）は

$$\delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

となる．この二次方程式を解いて

$$\delta = \delta_{st} \pm \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st}h} = \delta_{st}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)$$

が得られる．このとき生じる応力 σ_{dy} は

$$\sigma_{dy} = E\varepsilon = E\frac{\delta}{L} == E\frac{\delta_{st}}{L}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right) = \sigma_{st}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)$$

具体的に数値を代入すれば (絶対値の大きい方の値について)，以下のようになる．

$$\sigma_{st} = \frac{Mg}{A} = \frac{1\times 9.8}{500} = 1.96\times 10^{-2}\ \mathrm{MPa}$$

$$\delta_{st} = \frac{\sigma_{st}}{E}L = \frac{MgL}{AE} = \frac{1\times 9.8\times 500}{500\times 206\times 10^3} = 4.76\times 10^{-5}\ \mathrm{mm}$$

$$\frac{\sigma_{dy}}{\sigma_{st}} = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\times 200}{4.76\times 10^{-5}}} = 2.90\times 10^3$$

$$\sigma_{dy} = 2.90\times 10^3\times\sigma_{st} = 2.90\times 10^3\times 1.96\times 10^{-2} = 5.69\times 10^1\ \mathrm{MPa}$$

$$\delta = 2.90\times 10^3\times\delta_{st} = 2.90\times 10^3\times 4.76\times 10^{-5} = 1.38\times 10^{-1}\ \mathrm{mm}$$