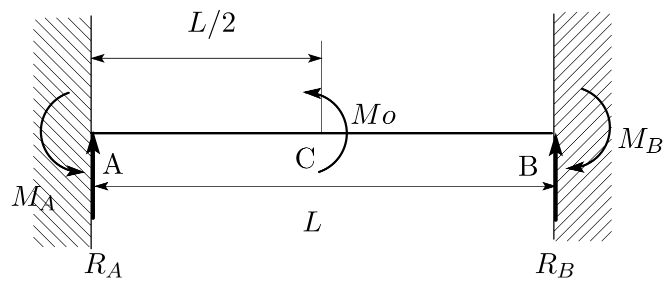
材料力学　演習（2007 年度 第 4 回）解答例

下記の問において，各はりの断面は一様で，ヤング率，断面 2 次モーメントはそれぞれ E，I とする．

問 1　図の様にモーメント荷重 Mo が中央に加わる両端固定のはりについて，反力，反モーメントを求め，SFD，BMD を描け．図に記した向きに反力，反モーメントが働くと仮定して解くこと．



1. 力とモーメントのつりあいを考える．

$$\text{力のつりあい} \qquad R_A + R_B = 0$$

$$\text{点 } A \text{ におけるモーメントのつりあい} \qquad M_A + M_o + R_B L = M_B$$

   したがって，このはりの不静定次数は 2.

2. せん断力と曲げモーメントの分布を求める（反力，反モーメントは未知数のまま）.

   $0 < x < L/2$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A \\ M &= -M_A + R_A x \end{aligned}$$

   $L/2 < x < L$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A \\ M &= -M_A + R_A x - M_o \end{aligned}$$

   したがって，曲げモーメントを特異関数を用いて表すと

$$M(x) = -M_A + R_A x - M_o \left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^0 \tag{1}$$

   となる．

3. たわみ曲線を求める

   たわみの基礎微分方程式に得られた曲げモーメントを代入し，積分する．

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{M}{EI} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{EI}\left(M_A - R_A x + M_o \left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^0\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= M_A - R_A x + M_o\left\langle x-\frac{1}{2}L\right\rangle^0 \\
EI\frac{dy}{dx} &= M_A x - \frac{1}{2}R_A x^2 + M_o\left\langle x-\frac{1}{2}L\right\rangle^1 + C_1 \\
EIy &= \frac{1}{2}M_A x^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{1}{2}M_o\left\langle x-\frac{1}{2}L\right\rangle^2 + C_1 x + C_2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

境界条件は,

$$
\begin{array}{lll}
x=0\text{ で} & y=0 & (i) \\
x=0\text{ で} & \frac{dy}{dx}=0 & (ii) \\
x=L\text{ で} & y=0 & (iii) \\
x=L\text{ で} & \frac{dy}{dx}=0 & (iv)
\end{array}
$$

$(i)(ii)$ より ただちに $C_1=0$，$C_2=0$ が得られる．

(iii) より

$$\frac{1}{2}M_A L^2 - \frac{1}{6}R_A L^3 + \frac{1}{2}M_o\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = 0$$

(iv) より

$$M_A L - \frac{1}{2}R_A L^2 + M_o\cdot\frac{1}{2}L = 0$$

これらから

$$
\begin{cases}
M_A - \frac{1}{3}R_A L + \frac{1}{4}M_o = 0 \\
M_A - \frac{1}{2}R_A L + \frac{1}{2}M_o = 0
\end{cases}
$$

M_A を消去して,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)R_A L - \frac{1}{4}M_o = 0$$

したがって反力，反モーメントは以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
R_A &= \frac{3}{2}\frac{M_o}{L} \\
R_B &= -R_A = -\frac{3}{2}\frac{M_o}{L} \\
M_A &= \frac{1}{3}R_A L - \frac{1}{4}M_o = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\frac{M_o}{L}\cdot L - \frac{1}{4}M_o = \frac{1}{4}M_o \\
M_B &= M_A + M_o + R_B L = \frac{1}{4}M_o + M_o - \frac{3}{2}\frac{M_o}{L}\cdot L = -\frac{1}{4}M_o
\end{aligned}
$$

4. SFD，BMD を描く

曲げモーメントについて整理すると

$0<x<L/2$ で

$$M = -M_A + R_A x = -\frac{1}{4}M_o + \frac{3}{2}\frac{M_o}{L}x = \frac{1}{4}M_o\left(-1+\frac{6x}{L}\right)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
M(0) &= -\frac{1}{4}M_o \\
M(L/2) &= \frac{1}{4}M_o\left(-1+\frac{6}{L}\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}M_o
\end{aligned}
$$

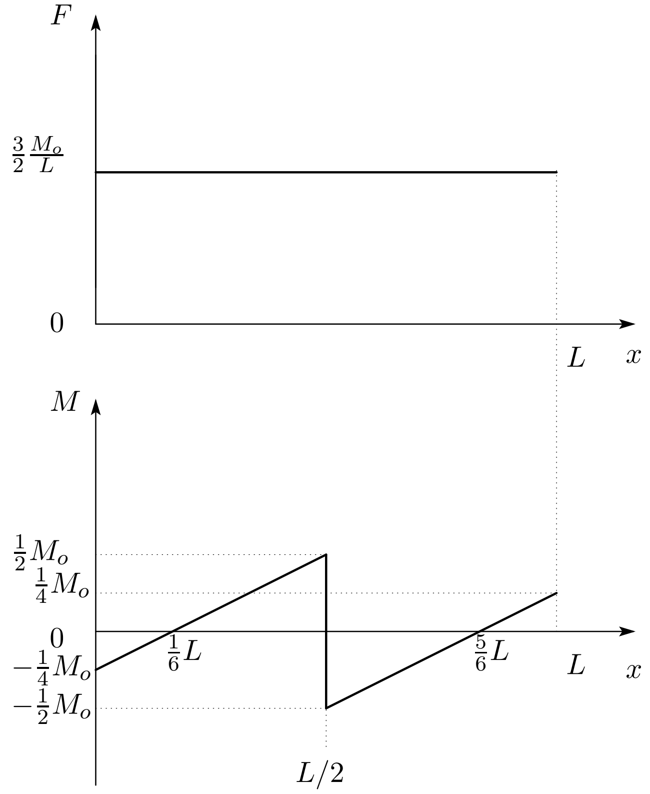
$L/2<x<L$ で

$$M = -M_A + R_A x - M_o = -\frac{5}{4}M_o + \frac{3}{2}\frac{M_o}{L}x = \frac{1}{4}M_o\left(-5+\frac{6x}{L}\right)$$

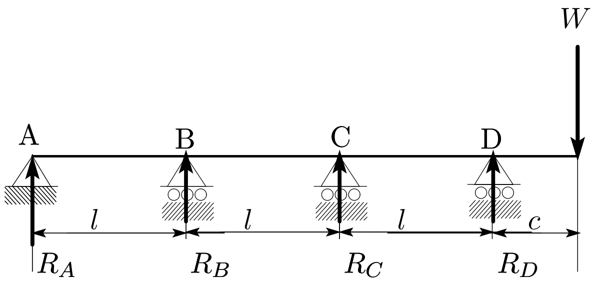
したがって

$$
\begin{aligned}
M(L/2) &= \frac{1}{4}M_o\left(-5+\frac{6}{L}\cdot\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{2}M_o \\
M(L) &= \frac{1}{4}M_o\left(-5+\frac{6}{L}\cdot L\right) = \frac{1}{4}M_o
\end{aligned}
$$

したがって，SFD，BMD は下図のようになる．



問 2　図に示す連続はりの各支点の反力を W, c, l を用いて表せ．また $W = 15\mathrm{kN}$，$c = l = 1\mathrm{m}$ の場合について，SFD, BMD を描け．ただし，反力は特異関数を用いて求めること．



1. 力とモーメントのつりあいを考える．

$$\text{力のつりあい} \qquad R_A + R_B + R_C + R_D = W$$

$$\text{点 } D \text{ におけるモーメントのつりあい} \qquad 3R_Al + 2R_Bl + R_Cl + Wc = 0$$

したがって，このはりの不静定次数は 2.

2. せん断力と曲げモーメントの分布を求める（反力，反モーメントは未知数のまま）．

$0 < x < l$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A \\ M &= R_A x \end{aligned}$$

$l < x < 2l$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A + R_B \\ M &= R_A x + R_B(x - l) \end{aligned}$$

$2l < x < 3l$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A + R_B + R_C \\ M &= R_A x + R_B(x - l) + R_C(x - 2l) \end{aligned}$$

$3l < x < 3l + c$ で

$$\begin{aligned} F &= R_A + R_B + R_C + R_D \\ M &= R_A x + R_B(x - l) + R_C(x - 2l) + R_D(x - 3l) \end{aligned}$$

したがって，曲げモーメントを特異関数を用いて表すと

$$M(x) = R_A x + R_B < x - l > + R_C < x - 2l > + R_D < x - 3l > \tag{3}$$

となる．

3. たわみ曲線を求める

たわみの基礎微分方程式に得られた曲げモーメントを代入し，積分する．

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{M}{EI} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{EI}\left(R_A x + R_B < x - l > + R_C < x - 2l > + R_D < x - 3l >\right) \\ -EI\frac{d^2y}{dx^2} &= R_A x + R_B < x - l > + R_C < x - 2l > + R_D < x - 3l > \\ -EI\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\Big(R_A x^2 + R_B < x - l >^2 + R_C < x - 2l >^2 + R_D < x - 3l >^2 + C_1\Big) \\ -EIy &= \frac{1}{6}\Big(R_A x^3 + R_B < x - l >^3 + R_C < x - 2l >^3 + R_D < x - 3l >^3 + 3C_1 x + C_2\Big) \end{aligned}$$

境界条件は,

$$
\begin{array}{lll}
x=0\text{ で} & y=0 & (i)\\
x=l\text{ で} & y=0 & (ii)\\
x=2l\text{ で} & y=0 & (iii)\\
x=3l\text{ で} & y=0 & (iv)
\end{array}
$$

(i) より ただちに $C_2=0$ が得られる.

(ii) より

$$R_A l^3 + 3C_1 l = 0$$

(iii) より

$$R_A(2l)^3 + R_B l^3 + 3C_1\cdot 2l = 0$$

(iv) より

$$R_A(3l)^3 + R_B(2l)^3 + R_C l^3 + 3C_1\cdot 3l = 0$$

これらから

$$\begin{cases} R_A l^2 + 3C_1 = 0 \\ 8R_A l^2 + R_B l^2 + 6C_1 = 0 \\ 27R_A l^2 + 8R_B l^2 + R_C l^2 + 9C_1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

を得る.これとモーメントのつりあい式

$$3R_A l + 2R_B l + R_C l + Wc = 0$$

を連立させて R_A,R_B,R_C,C_1 を求める.式 (4) を変形して

$$\begin{cases} R_A l^2 = -3C_1 \\ R_B l^2 = -8R_A l^2 - 6C_1 = -8(-3C_1) - 6C_1 = 18C_1 \\ R_C l^2 = -27R_A l^2 - 8R_B l^2 - 9C_1 = -27(-3C_1) - 8\cdot 18C_1 - 9C_1 = -72C_1 \end{cases} \tag{5}$$

とし,モーメントのつりあい式の両辺に l を乗じた式に代入すれば

$$
\begin{aligned}
&3R_A l^2 + 2R_B l^2 + R_C l^2 + Wcl = 0\\
&3(-3C_1) + 2(18C_1) + (-72C_1) + Wcl = 0\\
&-9C_1 l + 36C_1 - 72C_1 + Wcl = 0\\
&-36C_1 + Wcl = 0\\
&\therefore \qquad C_1 = \frac{Wcl}{45}
\end{aligned}
$$

C_1 が求まったので,式 (5) に代入して

$$
\begin{aligned}
R_A &= -\frac{3C_1}{l^2} = -\frac{3}{l^2}\frac{Wcl}{45} = -\frac{1}{15}\frac{Wc}{l}\\
R_B &= \frac{18C_1}{l^2} = \frac{18}{l^2}\frac{Wcl}{45} = \frac{6}{15}\frac{Wc}{l} = \frac{2}{5}\frac{Wc}{l}\\
R_C &= -\frac{72C_1}{l^2} = -\frac{72}{l^2}\frac{Wcl}{45} = -\frac{24}{15}\frac{Wc}{l} = -\frac{8}{5}\frac{Wc}{l}
\end{aligned}
$$

と反力 R_A,R_B,R_C が求まる.

残る反力 R_D は,力の釣り合いから

$$
\begin{aligned}
R_D &= W - (R_A + R_B + R_C)\\
&= W - \left(-\frac{1}{15} + \frac{6}{15} - \frac{24}{15}\right)\frac{Wc}{l}\\
&= W\left(1 + \frac{19}{15}\frac{c}{l}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

と得られる.

4. SFD，BMD を描く

$W = 15$kN，$c = l = 1$m を得られた関係に代入すると，

$$
\begin{aligned}
R_A &= = -\frac{1}{15}\frac{Wc}{l} = -\frac{1}{15}\frac{15\cdot 1}{1} = -1 \text{ kN} \\
R_B &= \frac{6}{15}\frac{Wc}{l} = \frac{6}{15}\frac{15\cdot 1}{1} = 6 \text{ kN} \\
R_C &= -\frac{24}{15}\frac{Wc}{l} = -\frac{24}{15}\frac{15\cdot 1}{1} = -24 \text{ kN} \\
R_D &= W\left(1 + \frac{19}{15}\frac{c}{l}\right) = 15\cdot\left(1 + \frac{19}{15}\right) = 34 \text{ kN}
\end{aligned}
$$

$0 < x < 1$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -1 \\
M &= -x
\end{aligned}
$$

$1 < x < 2$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -1 + 6 = 5 \\
M &= -x + 6(x-1) = 5x - 6
\end{aligned}
$$

$2 < x < 3$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -1 + 6 - 24 = 19 \\
M &= -x + 6(x-1) - 24(x-2) = -19x + 42
\end{aligned}
$$

$3 < x < 4$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -1 + 6 - 24 + 34 = 15 \\
M &= -x + 6(x-1) - 24(x-2) + 34(x-3) = 15x - 60
\end{aligned}
$$

これより， $M(0) = 0$ ，$M(1) = -1$， $M(2) = 4$ ，$M(3) = -15$ ，$M(4) = 0$ などに注意して SFD，BMD を描くと以下の図の様になる．