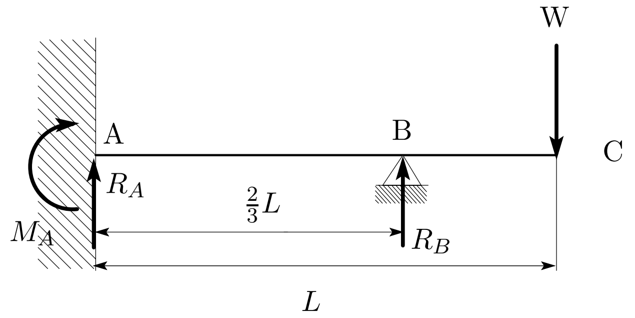
材料力学　演習（2007年度 第3回）解答例

問1　図のように集中荷重 W を受けるはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とし，図に記した向きに反力 R_A，R_B，反モーメント M_A が働くと仮定する．



1. このはりの不静定次数を求めよ．

   式の数：力のつりあいとモーメントのつりあいの2個，未知数の数：R_A, R_B, M_A の3個

   したがって，不静定次数は $3-2=1$

2. 力のつりあい式を記せ．

$$R_A + R_B = W$$

3. 点Bに関するモーメントのつりあい式を記せ．

$$M_A + R_A \cdot \frac{2}{3}L + W \cdot \frac{1}{3}L = 0$$

4. 点Aを原点とした座標系において，R_A，R_B，M_A，x，L を用いて以下の量を表せ．

   (a) $0 \le x \le \frac{2}{3}L$ におけるせん断力 F，曲げモーメント M

   $$F = R_A, \qquad M = M_A + R_A x$$

   (b) $\frac{2}{3}L \le x \le L$ におけるせん断力 F，曲げモーメント M

   $$F = R_A + R_B, \qquad M = M_A + R_A x + R_B\left(x - \frac{2}{3}L\right)$$

   (c) $0 \le x \le L$ における曲げモーメント M（特異関数を用いよ）

   $$M = M_A + R_A x + R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle$$

5. たわみの基礎微分方程式を上で求めた曲げモーメントを用いて表せ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left\{-M_A - R_A x - R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle\right\}$$

6. このはりの境界条件はどのようになるか.

(1) $x = 0$ で $y = 0$

(2) $x = 0$ で $\frac{dy}{dx} = 0$

(3) $x = \frac{2}{3}L$ で $y = 0$

7. たわみの基礎微分方程式をといて未知反力，未知反モーメントを求めよ.

$$
\begin{aligned}
EI\frac{dy}{dx} &= -M_A x - \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle^2 + C_1 \\
EIy &= -\frac{1}{2}M_A x^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle^3 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

(1) より $C_2 = 0,$ (2) より $C_1 = 0$

(3) より $-\frac{1}{2}M_A\left(\frac{2}{3}L\right)^2 - \frac{1}{6}R_A\left(\frac{2}{3}L\right)^3 = 0$

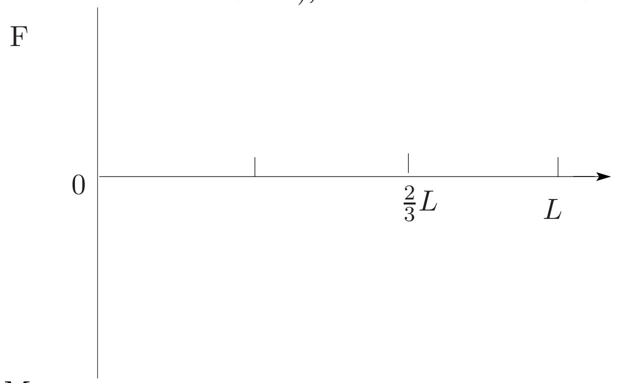
$\therefore \quad 9M_A + 2R_A L = 0$

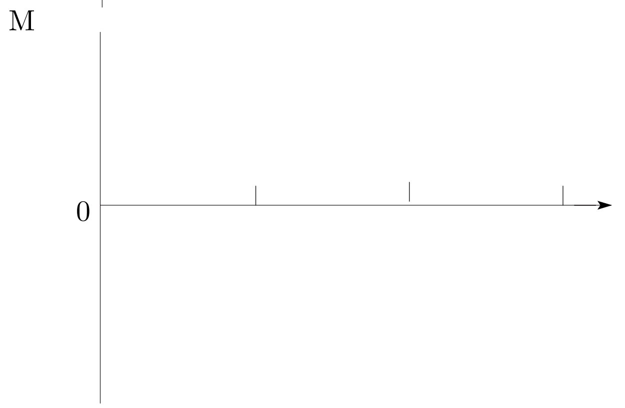
一方，モーメントのつりあい式から $M_A + \frac{2}{3}R_A L = -\frac{1}{3}WL$

この連立方程式を解いて $M_A = \frac{1}{6}WL \quad , \quad R_A = -\frac{3}{4}W$

力のつりあい式から $R_B = W - R_A = \frac{7}{4}W$

8. せん断力図（SFD)，曲げモーメント図（BMD) を描け.





$0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{3}{4}W \\
M &= \frac{1}{6}WL - \frac{3}{4}Wx \\
&= -\frac{3}{4}W\left(x - \frac{2}{9}L\right)
\end{aligned}
$$

$\frac{2}{3}L \leq x \leq L$ で

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{3}{4}W + \frac{7}{4}W = W \\
M &= \frac{1}{6}WL - \frac{3}{4}Wx \\
&\quad + \frac{7}{4}W\left(x - \frac{2}{3}L\right) \\
&= W(x - L)
\end{aligned}
$$

9. 危険断面の位置はどこか．点 A からの距離で示せ．

   求めた BMD より，$x = \frac{2}{3}L$ の位置が危険断面である．

10. たわみ曲線を求めよ．

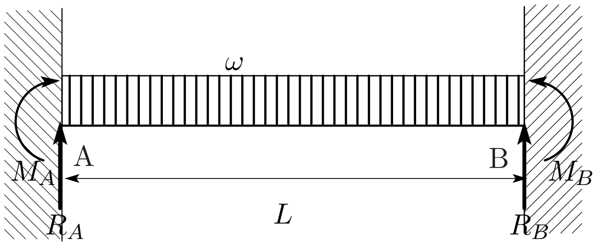
$$
\begin{aligned}
EIy &= -\frac{1}{2}M_A x^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}R_B \left\langle x - \frac{2}{3}L \right\rangle^3 + C_1 x + C_2 \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}WL\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}W\cdot x^3 - \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{4}W\left\langle x - \frac{2}{3}L \right\rangle^3 \\
y &= \frac{W}{24EI}\left(3x^3 - 2Lx^2 - 7\left\langle x - \frac{2}{3}L \right\rangle^3\right)
\end{aligned}
$$

11. 点 C のたわみを求めよ．

   上式で $x = L$ として

$$
y = \frac{W}{24EI}\left(3L^3 - 2L^3 - 7\left\langle L - \frac{2}{3}L \right\rangle^3\right) = \frac{20}{27}\frac{WL^3}{24EI} = \frac{5}{162}\frac{WL^3}{EI}
$$

問 2　分布荷重 ω が加わる図の両端固定のはりのたわみ曲線を求めよ．ヤング率を E，断面 2 次モーメントを I とする．



1. 図の様に反力，反モーメントを仮定する．

   力のつりあい　　$R_A + R_B = \omega L$

   点 A におけるモーメントのつりあい　　$M_A + \frac{1}{2}\omega L = R_B L + M_B$

2. せん断力と曲げモーメントの分布を求める（反力，反モーメントは未知数のまま）．

$$F = R_A - \omega x$$

$$M = M_A + R_A x - \frac{1}{2}\omega x^2$$

3. たわみの微分方程式に曲げモーメントを代入して積分する．

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{M}{EI} \\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_A - R_A x + \frac{1}{2}\omega x^2 \\
EI\frac{dy}{dx} &= -M_A x - \frac{1}{2}R_A x^2 + \frac{1}{6}\omega x^3 + C_1 \\
EIy &= -\frac{1}{2}M_A x^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{1}{24}\omega x^4 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

4. はりの B.C.（境界条件）を考える．

$$\begin{array}{llll} (1) & x=0 & で & \frac{dy}{dx}=0 \\ (2) & x=0 & で & y=0 \\ (3) & x=L & で & \frac{dy}{dx}=0 \\ (4) & x=L & で & y=0 \end{array}$$

5. 境界条件を適用して，積分定数と反力，反モーメントを求める．

(1)(2) から，ただちに $C_1=0, C_2=0$ がわかる．

$$\begin{array}{ll} (3)\text{ から} & -M_AL-\frac{1}{2}R_AL^2+\frac{1}{6}\omega L^3=0 \\ (4)\text{ から} & -\frac{1}{2}M_AL^2-\frac{1}{6}R_AL^3+\frac{1}{24}\omega L^4=0 \end{array}$$

これより

$$\left\{\begin{array}{rcl} -M_AL-\frac{1}{2}R_AL^2+\frac{1}{6}\omega L^3 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}M_AL-\frac{1}{6}R_AL^2+\frac{1}{24}\omega L^3 & = & 0 \end{array}\right.$$

したがって

$$\left\{\begin{array}{rcl} -M_AL-\frac{1}{2}R_AL^2+\frac{1}{6}\omega L^3 & = & 0 \\ -M_AL-\frac{2}{6}R_AL^2+\frac{2}{24}\omega L^3 & = & 0 \end{array}\right.$$

を解いて，反力，反モーメントが以下のように求められる．

$$\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{2}\right)R_AL^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{24}\right)\omega L^3=0$$

$$\therefore \quad R_A=\frac{1}{2}\omega L$$

$$M_A=-\frac{1}{2}R_AL+\frac{1}{6}\omega L^2=-\frac{1}{4}\omega L^2+\frac{1}{6}\omega L^2=-\frac{1}{12}\omega L^2$$

6. 求めるたわみ曲線は以下のようになる．

$$\begin{array}{rcl} EIy & = & -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\omega L^2\right)x^2-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\omega L\right)x^3+\frac{1}{24}\omega x^4 \\ & = & \frac{1}{24}\omega L^2x^2-\frac{1}{12}\omega Lx^3+\frac{1}{24}\omega x^4 \\ & = & \frac{1}{24}\omega x^2(L^2-2Lx+x^2) \\ \therefore y & = & \frac{1}{24}\frac{\omega x^2}{EI}(x-L)^2 \end{array}$$