材料力学　試験（2K3 年度 第 2 回）

2003/07/18（金）　得点

No.1　番号　クラス　M1・M2　氏 名

1. 多軸応力状態におけるフックの法則は以下のように与えられる．

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

これより平面応力状態，平面ひずみ状態における応力–ひずみ関係をそれぞれ導け．[20 点]

$x-y$ 平面内での 2 次元問題として考える．

(a) 平面応力状態

この場合，$x-y$ 平面に垂直な応力成分 σ_z が零であり，また τ_{zx}, τ_{zy} も零となる．したがって与式に代入して，零でないひずみ成分は以下のようになる．

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad , \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

(b) 平面ひずみ状態

z 方向に変形しない，すなわちひずみ成分 $\varepsilon_z, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$ が零である．したがって

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x) = 0$$

これより

$$\sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_x)$$

ε_x の式に代入して

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\{\sigma_y + \nu(\sigma_y + \sigma_x)\} = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_y \\ &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)\end{aligned}$$

同様に ε_y の式に代入して

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\{\sigma_x + \nu(\sigma_y + \sigma_x)\} = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_x \\ &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)\end{aligned}$$

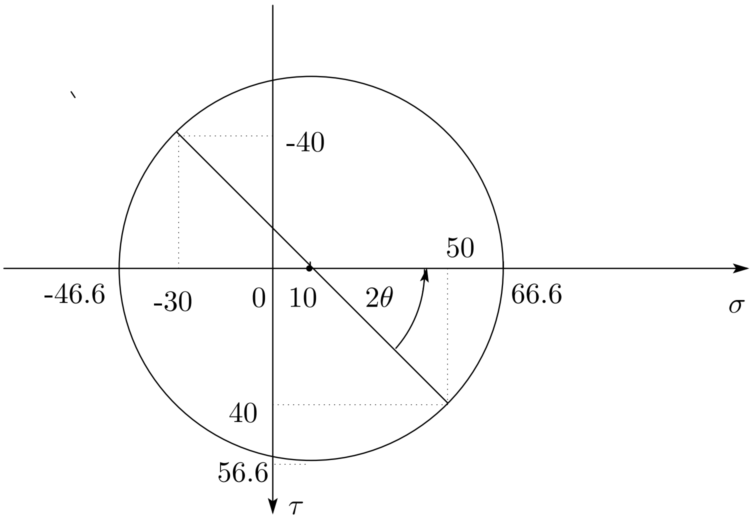
また零でないせん断ひずみは

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

となる．

2. ある部品に，応力 $\sigma_x = 50$ MPa，　$\sigma_y = -30$ MPa，　$\tau_{xy} = 40$ MPa がそれぞれ作用している．

(a) 図に正しく座標軸や目盛り，必要な値などを記入して，モールの応力円を完成させ，最大主応力，最小主応力，最大主応力の方向，最大 せん断応力を求めよ．[30 点]



モールの応力円の中心は，　$\left(\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0\right) = \left(\frac{1}{2}(50-30), 0\right) = (10, 0)$ であり，２点 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (50, 40)$，　$(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-30, -40)$ を通る．

円の半径は $\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{80^2 + 4 \times 40^2} = 40\sqrt{2} = 56.6$

したがって

最大主応力	$\sigma_1 = 10 + 56.6 = 66.6MPa$
最小主応力	$\sigma_2 = 10 - 56.6 = -46.6MPa$
最大せん断応力	$\tau_{max} = 56.6MPa$

最大主応力の方向は

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 40}{50 + 30} = 1$$

より，$2\theta = \pi/4$，すなわち $\theta = \pi/8$ (22.5°)．

(b) この部品を，最大せん断応力説に従って破損する材料で製作するものとする．安全率 S を 4 とした場合，引張強さ σ_B がいくら以上の材料を用いなければならないか．[10 点]

最大せん断応力説に従うとき，部材の最大せん断応力 τ_{max} は，許容せん断応力を τ_a，せん断強さ τ_B とすると，

$$\tau_{max} < \tau_a = \frac{\tau_B}{S}$$

の関係を満たさねばならない．これより

$$\tau_B > S \cdot \tau_{max} = 4 \cdot 56.6 = 226$$

また最大せん断応力説に従うとき，引張強さはせん断強さの 2 倍となるから，

$$\sigma_B = 2\tau_B > 2 \cdot 4 \cdot 56.6 = 453 \text{ MPa}$$

No.2　　番号 $\boxed{}$　　クラス　M1・M2　氏 名 $\boxed{}$

3. 以下の文章中の $\boxed{}$ に適切な文字（あるいは文字式）を入れて，文章を完成させよ．[20 点]

垂直応力 σ，垂直ひずみ ε が働くとき，単位体積あたりに蓄えられるひずみエネルギー $\bar{U}$ は，ヤング率を E として

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\boxed{\sigma}\cdot\boxed{\varepsilon} = \frac{1}{2}E\boxed{\varepsilon^2} = \frac{1}{2E}\boxed{\sigma^2}$$

の形で与えられる．

したがって，長さ L，断面 A のはりの曲げについて，このはりに蓄えられるひずみエネルギー U は

$$U = \int_0^L\int_A \bar{U}\,dA\,dx = \int_0^L\int_A \frac{1}{2E}\boxed{\sigma^2}\,dA\,dx$$

となる．

一方，ある断面 A に働く曲げモーメントを M，中立面からの距離を y，断面 2 次モーメントを I とすると，応力 σ は

$$\sigma = \frac{\boxed{M}}{\boxed{I}}\boxed{y}$$

と表されるので，

$$U = \int_0^L\int_A \frac{1}{2E}\frac{\boxed{M^2}}{\boxed{I^2}}\boxed{y^2}\,dA\,dx$$

となる． M， E，I はある断面では一定値をとるから，この積分は

$$U = \int_0^L \frac{1}{2E}\frac{\boxed{M^2}}{\boxed{I^2}}\int_A\boxed{y^2}\,dA\,dx$$

と変形できるが，断面 2 次モーメント I は $I = \int_A \boxed{y^2}\,dA$ と定義されるので，上式は

$$U = \int_0^L \frac{1}{2E}\frac{\boxed{M^2}}{\boxed{I}}\,dx$$

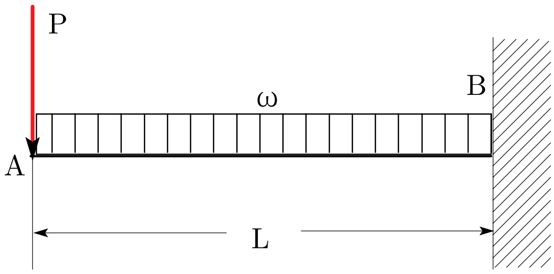
となり，曲げにおいて蓄えられるひずみエネルギーを表す式を得る．

カスティリィアーノの定理によれば，荷重点（集中荷重 W）のたわみ δ は，ひずみエネルギーを用いて

$$\delta = \boxed{\frac{\partial U}{\partial W}} = \int_0^L \boxed{\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}}\,dx$$

と表せる．

4. 図のように分布荷重 ω を受ける片持ちはりについて，点 A のたわみをカスティリィアーノの定理を用いて求めよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とする．[20 点]



図のように，点 A に仮想的に集中荷重 P を負荷して考える．この場合の点 A のたわみを δ とする．このとき

$$\begin{aligned} \text{せん断力} \qquad F &= -\omega x - P \\ \text{曲げモーメント} \qquad M &= -\frac{1}{2}\omega x^2 - Px \end{aligned}$$

カスティリィアーノの定理により，$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$ に注意して

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial P}dx \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{1}{2}\omega x^2 - Px\right)(-x)dx \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{1}{2}\omega x^3 + Px^2\right)dx \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{8}\omega x^4 + \frac{1}{3}Px^3\right]_0^L = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{8}\omega L^4 + \frac{1}{3}PL^3\right\} \end{aligned}$$

したがって求めるたわみ δ_A は，$P \to 0$ を考えて

$$\delta_A = \delta|_{P\to 0} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{8}\omega L^4 + \frac{1}{3}PL^3\right)\bigg|_{P\to 0} = \frac{\omega L^4}{8EI}$$