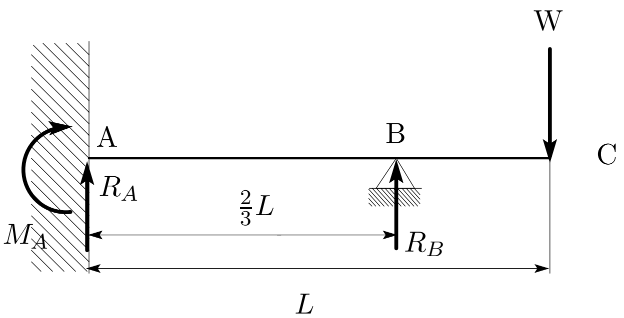
材料力学　試験（2K3 年度 第 1 回）

2003/05/23（金）　得点

No.1　番号　氏 名

1. 図のように集中荷重 W を受けるはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とし，図に記した向きに反力 R_A，R_B，反モーメント M_A が働くと仮定する．



(a) このはりの不静定次数を求めよ．(3 点)

式の数：力のつりあいとモーメントのつりあいの 2 個，未知数の数：R_A, R_B, M_A の 3 個

したがって，不静定次数は $3 - 2 = 1$

(b) 力のつりあい式を記せ．(2 点)

$$R_A + R_B = W$$

(c) 点 B に関するモーメントのつりあい式を記せ．(3 点)

$$M_A + R_A \cdot \frac{2}{3}L + W \cdot \frac{1}{3}L = 0$$

(d) 点 A を原点とした座標系において，R_A，R_B，M_A，x，L を用いて以下の量を表せ．

i. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$ におけるせん断力 F，曲げモーメント M (4 点)

$$F = R_A, \qquad M = M_A + R_A x$$

ii. $\frac{2}{3}L \leq x \leq L$ におけるせん断力 F，曲げモーメント M (4 点)

$$F = R_A + R_B, \qquad M = M_A + R_A x + R_B \left(x - \frac{2}{3}L\right)$$

iii. $0 \leq x \leq L$ における曲げモーメント M（特異関数を用いよ）(3 点)

$$M = M_A + R_A x + R_B \left\langle x - \frac{2}{3}L \right\rangle$$

(e) たわみの基礎微分方程式を上で求めた曲げモーメントを用いて表せ．(3 点)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left\{-M_A - R_A x - R_B \left\langle x - \frac{2}{3}L \right\rangle\right\}$$

(f) このはりの境界条件はどのようになるか．(6 点)

$$\begin{array}{llll} (1) & x=0 & で & y=0 \\ (2) & x=0 & で & \frac{dy}{dx}=0 \\ (3) & x=\frac{2}{3}L & で & y=0 \end{array}$$

(g) たわみの基礎微分方程式をといて未知反力，未知反モーメントを求めよ．(15 点)

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_Ax - \frac{1}{2}R_Ax^2 - \frac{1}{2}R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{2}M_Ax^2 - \frac{1}{6}R_Ax^3 - \frac{1}{6}R_B\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle^2 + C_1x + C_2$$

(1) より　$C_2 = 0,$　　(2) より　$C_1 = 0$

(3) より　$-\frac{1}{2}M_A\left(\frac{2}{3}L\right)^2 - \frac{1}{6}R_A\left(\frac{2}{3}L\right)^3 = 0$

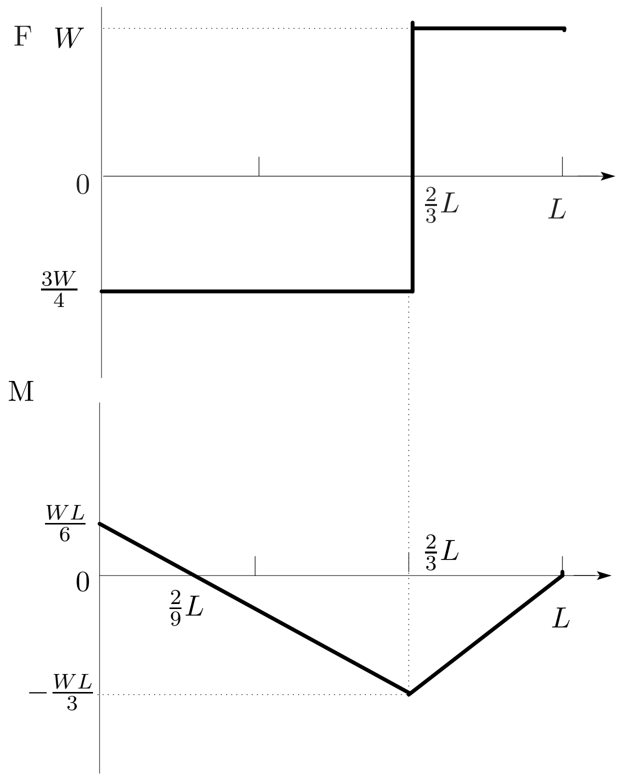
$\therefore \quad 9M_A + 2R_AL = 0$

一方，モーメントのつりあい式から　$M_A + \frac{2}{3}R_AL = -\frac{1}{3}WL$

この連立方程式を解いて　$M_A = -\frac{1}{6}WL$　，　$R_A = -\frac{3}{4}W$

力のつりあい式から　$R_B = W - R_A = \frac{7}{4}W$

(h) せん断力図（SFD)，曲げモーメント図（BMD) を描け．(7 点)



$0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$　で

$$F = -\frac{3}{4}W$$

$$M = \frac{1}{6}WL - \frac{3}{4}Wx = -\frac{3}{4}W\left(x - \frac{2}{9}L\right)$$

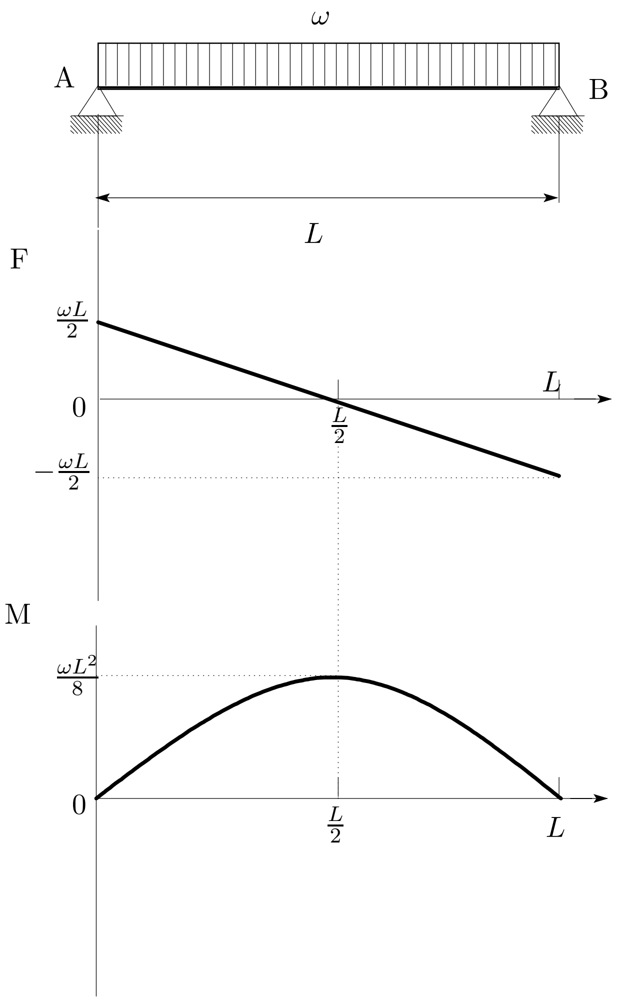
$\frac{2}{3}L \leq x \leq L$　で

$$F = -\frac{3}{4}W + \frac{7}{4}W = W$$

$$M = \frac{1}{6}WL - \frac{3}{4}Wx + \frac{7}{4}W\left(x - \frac{2}{3}L\right) = W(x - L)$$

No.2 番号 氏 名

2. 一様な分布荷重 ω が働く図の単純支持はりについて以下の問いに答えよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とする．



(a) せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(15 点)

反力 R_A,R_B が図のように働くとする．

力のつりあい $\quad R_A + R_B = \omega L$

対称性から $\quad R_A = R_B = \dfrac{1}{2}\omega L$

せん断力

$$F = \frac{1}{2}\omega L - \omega x$$

曲げモーメント

$$M = \frac{1}{2}\omega L x - \frac{1}{2}\omega x^2$$

最大曲げモーメント

$$M\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{8}\omega L^2$$

(b) たわみ曲線を求め，最大たわみ量，A 点，B 点のたわみ角を求めよ．(19 点)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\omega L x - \frac{1}{2}\omega x^2\right) = \frac{\omega}{2EI}(x^2 - Lx)$$

$$\frac{2EI}{\omega}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + C_1$$

$$\frac{2EI}{\omega}y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}Lx^3 + C_1 x + C_2$$

$B.C.$ $\quad x = 0$ で $\quad y = 0 \to C_2 = 0$

$x = L$ で $\quad y = 0 \to \dfrac{1}{12}L^4 - \dfrac{1}{6}L^4 + C_1 = 0 \to C_1 = \dfrac{L^3}{12}$

したがってたわみ曲線は

$$y = \frac{\omega}{2EI}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}Lx^3 + \frac{1}{12}L^3 x\right)$$
$$= \frac{\omega x}{24EI}\left(x^3 - 2Lx^2 + L^3\right) = \frac{\omega x}{24EI}(x - L)(x^2 - Lx - L^2)$$

たわみ角は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{24EI}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{L^3}{12}\right) = \frac{\omega}{24EI}(2x - L)(2x^2 - 2Lx - L^2)$$

$dy/dx = 0$ よりたわみが最大となるのは $x = L/2$

$$y_{max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\omega}{24EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\left\{\left(\frac{L}{2}\right)^3 - 2L\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^3\right\} = \frac{5}{384}\frac{\omega L^4}{EI}$$

A 点のたわみ角は

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{\omega}{2EI}\cdot\frac{L^3}{12} = \frac{\omega L^3}{24EI}$$

B 点のたわみ角は

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \frac{\omega}{2EI}\cdot\left\{\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{12}\right\} = -\frac{\omega L^3}{24EI}$$

(c) $L = 500$mm，$\omega = 4$N/mm としてこのはりを丸棒で製作する．用いる材料の降伏応力は 300MPa，Young 率は $E = 200$GPa である．最大たわみは 0.8mm 以下としたい．この丸棒の直径 d(mm) を定めよ．安全率を 5 とする．(16 点)

最大たわみは前問から

$$y_{max} = \frac{5}{384}\frac{\omega L^4}{EI}$$

丸棒の断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{\pi}{64}d^4$$

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{5}{384}\frac{\omega L^4}{E}\cdot\frac{64}{\pi d^4} = \frac{5\omega L^4}{6\pi E d^4}$$

したがって

$$d > \sqrt[4]{\frac{5\omega L^4}{6\pi E y_{max}}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 4\cdot 500^4}{6\pi\cdot 200\cdot 1000\cdot 0.8}} \approx 25.4mm$$

丸棒の断面係数は

$$Z = \frac{\pi}{32}d^3$$

最大曲げモーメントは (a) から

$$M_{max} = \frac{1}{8}\omega L^2$$

したがって最大応力が許容応力以下であるためには

$$\frac{\sigma_Y}{S} > \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{\frac{1}{8}\omega L^2}{\frac{\pi}{32}d^3} = \frac{4\omega L^2}{\pi d^3}$$

$$d > \sqrt[3]{\frac{4\omega L^2 S}{\pi\sigma_Y}} = \sqrt[3]{\frac{4\cdot 4\cdot 500^2\cdot 5}{\pi\cdot 300}} \approx 27.7mm$$

両者を比較して，丸棒の直径は 27.7 mm 以上でなければならない．

3. 講義の感想，コメントなど自由に（採点には無関係！）