材料力学　試験（'02 年度 第 2 回）

2002/07/19（金）　得点

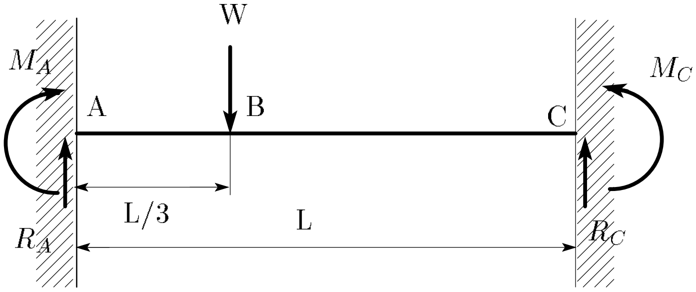
番号　　氏 名

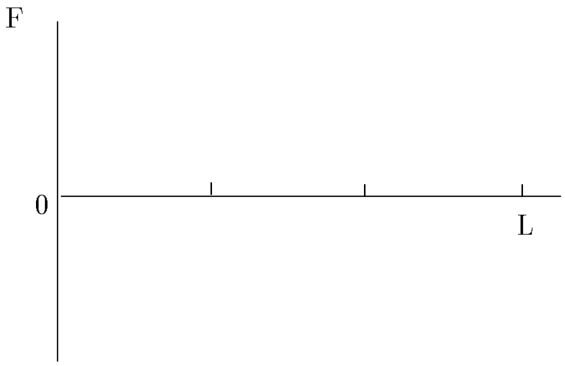
注意　導出の過程を記すこと．未記入の場合は 0 点！
電卓は利用可．携帯電話等を電卓代わりに利用することは不可

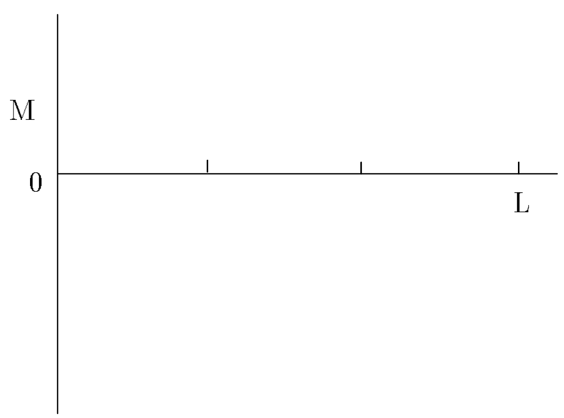
---

1. 図の両端固定はりに荷重 W が加わっている．以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面 2 次モーメントを I，断面係数を Z とする．

   (a) 支点反力，反モーメントの向きを図のように仮定するとき，その値 R_A，R_C，M_A，M_C を求めよ．またせん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．[20 点]







力のつりあいから

$$W = R_A + R_C$$

点 A のまわりのモーメントの釣り合いから

$$M_A + W \times \frac{L}{3} = M_C + R_C \times L$$

せん断力，曲げモーメントの分布は

$0 < x < \frac{L}{3}$ で

$$F = R_A$$
$$M = M_A + R_A x$$

$\frac{L}{3} < x < L$ で

$$F = R_A - W$$
$$M = M_A + R_A x - W\left(x - \frac{L}{3}\right)$$

したがってモーメントを特異関数を用いてあらわすと

$$M = M_A + R_A x - W < x - \frac{L}{3} >$$

たわみの基礎方程式に代入して

$$\begin{aligned}
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_A - R_A x + W < x - \frac{L}{3} > \\
EI\frac{dy}{dx} &= -M_A x - \frac{R_A}{2}x^2 + \frac{W}{2} < x - \frac{L}{3} >^2 + C_1 \\
EIy &= -\frac{M_A}{2}x^2 - \frac{R_A}{6}x^3 + \frac{W}{6} < x - \frac{L}{3} >^3 + \\
&\quad + C_1 x + C_2
\end{aligned}$$

境界条件は

$x = 0$ で　$y = 0$　→　$C_2 = 0$

$x = 0$ で　$\frac{dy}{dx} = 0$　→　$C_1 = 0$

$x = L$ で　$y = 0$　→　$-\frac{R_A}{6}L^3 + \frac{W}{6}\left(\frac{2}{3}L\right)^3 - \frac{M_A}{2}L^2 = 0$

$x = L$ で　$\frac{dy}{dx} = 0$　→　$-\frac{R_A}{2} + \frac{W}{2}\left(\frac{2}{3}L\right)^2 - M_A L = 0$

R_A と M_A に関する上の連立方程式を解けば

$$M_A = -\frac{4}{27}WL\,,\; R_A = \frac{20}{27}W$$

力のつりあい，モーメントの釣り合いから R_C と M_C は以下のように求められる．

$$R_C = \frac{7}{27}\,,\; M_C = -\frac{2}{27}WL$$

したがってせん断力，曲げモーメントの分布は

$0 < \ x \ < \dfrac{L}{3}$ で

$$\begin{aligned} F &= \frac{20}{27}W \\ M &= -\frac{4}{27}WL + \frac{20}{27}Wx = \frac{20}{27}W\left(x - \frac{L}{5}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{L}{3} < \ x \ < L$ で

$$\begin{aligned} F &= \frac{20}{27}W - W = -\frac{7}{27}W \\ M &= -\frac{4}{27}WL + \frac{20}{27}Wx - W\left(x - \frac{L}{3}\right) = -\frac{W}{27}(7x - 5L) = -\frac{7}{27}W\left(x - \frac{5}{7}L\right) \end{aligned}$$

なお，これらより

$$M\left(\frac{L}{5}\right) = 0\,,\; M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{8}{81}WL\,,\; M\left(\frac{5L}{7}\right) = 0$$

以上を図示する．

(b) このはりに働く最大曲げ応力と，生じる位置（危険断面の位置）を求めよ．[10 点]

BMD より

$$|M(0)| = \frac{4}{27}WL > \left|M\left(\frac{L}{3}\right)\right| = \frac{8}{81}WL > |M(L)| = \frac{2}{27}WL$$

したがって危険断面の位置は A 点 ($x = 0$ の位置)

最大応力 σ_{max} は

$$\sigma_{max} = \frac{|M(0)|}{Z} = \frac{4}{27}\frac{WL}{Z}$$

(c) 点 B のたわみを求めよ．[10 点]

(a) より

$$EIy = -\frac{M_A}{2}x^2 - \frac{R_A}{6}x^3 + \frac{W}{6} < x - \frac{L}{3} >^3$$

したがって

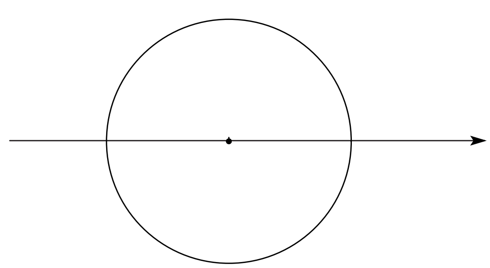
$$\begin{aligned} EIy\left(\frac{L}{3}\right) &= -\frac{M_A}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^2 - \frac{R_A}{6}\left(\frac{L}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{27}WL\right)\cdot\frac{L^2}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{20}{27}W\right)\cdot\frac{L^3}{27} \\ &= \frac{8}{2187}WL^3 \\ y\left(\frac{L}{3}\right) &= \frac{8}{2187}\frac{WL^3}{EI} \end{aligned}$$

番号 　　　　 氏 名

(d) $W = 3KN$，$L = 500mm$ の場合について，このはりを丸棒で製作するとき，B 点のたわみが $0.1mm$ 以下でかつ最大応力が許容応力以下となるようにするためには，直径をいくら以上にすべきか．ただし，材料の降伏応力は $\sigma_Y = 400MPa$ であり，降伏応力を基準強さとし，安全率 $S = 5$ とする．またヤング率を $E = 200GPa$ とする．[20 点]

2. ある機械部品に，応力 $\sigma_x = 140MPa$ ，$\sigma_y = 20MPa$ ，$\tau_{xy} = 80MPa$ が作用している．

(a) 主応力とその方向を求めたい．図に正しく座標軸や目盛り，必要な値などを記入して，モールの応力円を完成させ，最大主応力，最小主応力，最大主応力の方向，最大せん断応力を求めよ．[20 点]



(b) この部品を，最大せん断応力説に従って破損する材料で製作するものとする．この材料のせん断強さが $\tau_B = 360MPa$ であるとき，加えることのできる σ_x の値はいくらか．ただし，σ_y , τ_{xy} は (a) の状態から変化せず一定のままであり，安全率 $S = 3$ とする．[20 点]