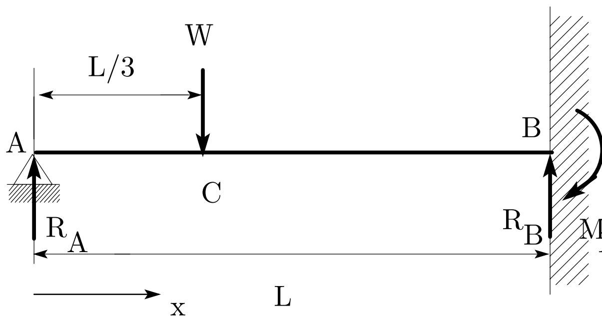
材料力学　試験（2K1 年度 第 2 回）

2001/07/19（木）　得点

番号　　氏 名

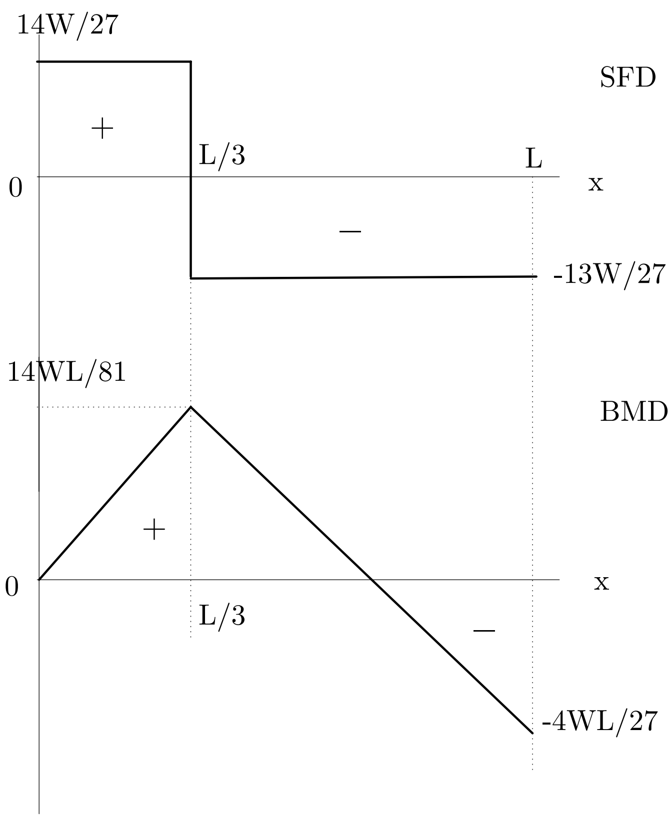
1. 図のはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．



(a) 反力，反モーメントを積分法を用いて求めよ．[30 点]

(b) せん断力，曲げモーメント分布図を描け．[10 点]

(c) 点 C のたわみを求めよ．[10 点]
[10 点]



[解答例]
図のように反力 R_A ， R_B ，反モーメント M_B が生じるとする．

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{力のつりあい} \\
\quad R_A + R_B = W \\
\text{モーメントのつりあい}\ (B\ \text{点のまわり}) \\
\quad R_A L + M_B = W\left(L - \frac{L}{3}\right)
\end{array}
\right.
$$

せん断力と曲げモーメントの分布は

$0 \le x \le L/3$

$$F = R_A$$
$$M = R_A \cdot x$$

$L/3 \le x \le L$

$$F = R_A - W$$
$$M = R_A \cdot x - W \cdot (x - L/3)$$

特異関数を用いて曲げモーメントをあらわすと

$$M(x) = R_A \cdot x - W\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle$$

たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -R_A \cdot x + W\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle$$

となり，これを積分すると

$$
\begin{aligned}
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_A\cdot x + W\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle \\
EI\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}R_A\cdot x^2 + \frac{1}{2}W\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^2 + C_1 \qquad (1)\\
EIy &= -\frac{1}{6}R_A\cdot x^3 + \frac{1}{6}W\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^3 + C_1\cdot x + C_2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

境界条件は

$$
\begin{cases}
x=0 \quad \text{で} \quad y=0 & (a)\\
x=L \quad \text{で} \quad y=0 & (b)\\
x=L \quad \text{で} \quad \frac{dy}{dx}=0 & (c)
\end{cases}
$$

条件 (a) を 式 (2) へ入れて， $C_2 = 0$ がすぐに得られ，また条件 (b) を 式 (2) へ入れて

$$
-\frac{1}{6}R_A\cdot L^3 + \frac{1}{6}W\,(L - L/3)^3 + C_1\cdot L = 0\,, \qquad (3)
$$

条件 (c) を 式 (1) へ入れて

$$
-\frac{1}{2}R_A\cdot L^2 + \frac{1}{2}W\,(L - L/3)^2 + C_1 = 0\,. \qquad (4)
$$

式 (3) と式 (4) を連立させて R_A， C_1 を求めると

$$
R_A = \frac{14}{27}W\,, \qquad C_1 = \frac{1}{27}W\,L^2
$$

R_A を力のつりあい，モーメントの釣り合いに代入して

$$
R_B = \frac{13}{27}W\,, \qquad M_B = \frac{4}{27}W\,L
$$

したがって SFD , BMD は以下の式を図示すればよい．

	$0 \le x \le L/3$	$L/3 \le x \le L$
せん断力：	$F = \frac{14}{27}W$	$F = -\frac{13}{27}W$
曲げモーメント：	$M = \frac{14}{27}W\,x$	$M = -\frac{13}{27}W\,x + \frac{1}{3}WL$

一方，式 (2) のたわみ曲線は

$$
y = \frac{W}{EI}\left(\frac{7}{81}x^3 + \frac{1}{6}\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^3 + \frac{1}{27}L^2\,x\right)
$$

となり，C 点のたわみは上式で $x = L/3$ とおいて

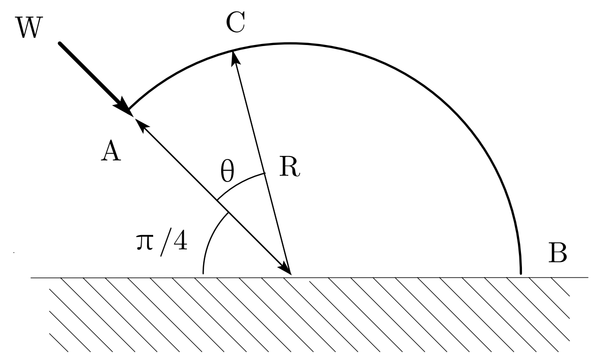
$$
y\Big|_{x=L/3} = \frac{W}{EI}\left\{-\frac{7}{81}\left(\frac{L}{3}\right)^3 + \frac{1}{27}L^2\frac{L}{3}\right\} = \frac{20}{2187}\frac{WL^3}{EI}
$$

と求められる．

2. 図のはりについて以下の問いに答えよ．ただしヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．

(a) 点Cのモーメント M を，角度 θ ，荷重 W ，半径 R を用いてあらわせ．[5 点]

(b) 点 A の荷重方向の変位をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．[15 点]



[解答例]

(a)

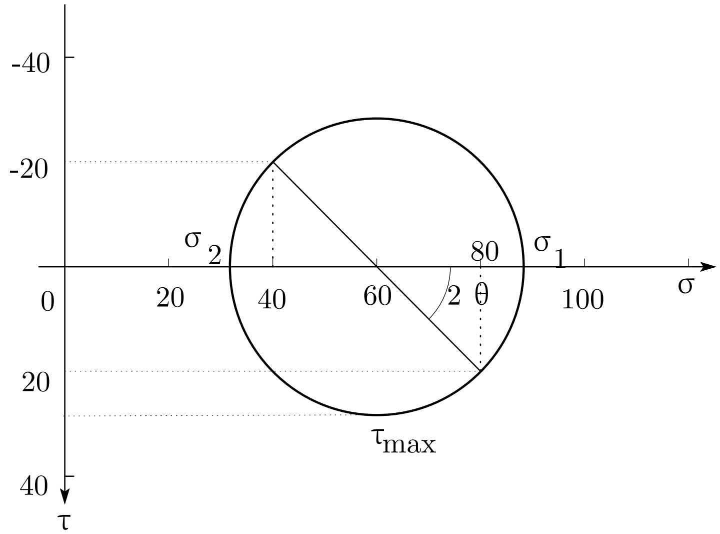
$$M(\theta) = -W\,R\,\sin\theta$$

(b) 点 A の荷重方向の変位を δ とすると，カスティリアーノの定理から

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\partial U}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial W}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{M^2}{EI}\,R\,d\theta\right\} \\
EI\delta &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} M\frac{\partial M}{\partial W}\,R\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} WR\sin\theta\cdot R\,\sin\theta\cdot R\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} WR^3\sin^2\theta\,d\theta = \frac{WR^3}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{WR^3}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{WR^3}{2}\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) \\
\delta &= \frac{3\pi+2}{8}\,\frac{WR^3}{EI}
\end{aligned}$$

3. ある機械部品に，応力 $\sigma_x = 80(MPa)$ ，　$\sigma_y = 40(MPa)$ ，　$\tau_{xy} = 20(MPa)$ が作用している．

(a) 主応力とその方向を求めたい．図に正しく座標軸や目盛り，必要な値などを記入して，モールの応力円を完成させ，最大主応力，最小主応力，最大主応力の方向，最大せん断応力を求めよ．［20 点］



[解答例]　モールの応力円の中心の座標は

$$\left(\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = \left(\frac{80+40}{2}, 0\right) = (60, 0)$$

であり，点 $(\sigma, \tau) = (\sigma_x, \tau_{xy}) = (80, 20)$ を通る円である（座標軸の向きに注意）．
応力円の半径は

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{80-40}{2}\right)^2 + 20^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \approx 28.3$$

であり，最大主応力 σ_1 ，最小主応力 σ_2 はそれぞれ

$$\sigma_1 = 60 + 28.3 = 88.3(MPa) \quad , \quad \sigma_2 = 60 - 28.3 = 31.7(MPa)$$

また最大主応力の方向 θ は

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\pi}{8}$$

最大せん断応力は円の半径に等しく，　$\tau_{max} = 28.3(MPa)$ となる．

(b) この部品を，最大せん断応力説に従って破損する材料で製作するものとする．安全率 S を 5 とした場合，せん断強さ τ_B がいくら以上の材料を用いなければならないか．[10 点]

[解答例]

最大せん断応力説に従うと，最大せん断応力が許容せん断応力以下でなければならない．

許容せん断応力 τ_a は $\tau_a = \frac{\tau_B}{S}$ であるから

$$\tau_{max} \leq \tau_a = \frac{\tau_B}{S}$$

$$\therefore \quad \tau_B \geq S \cdot \tau_{max} = 5 \times 28.3 = 141.4\ (MPa)$$