材料力学　試験（'01 年度 第 1 回）

2001/12/14（金 3 限版）　得点 $\boxed{}$

番号 $\boxed{}$ 氏 名 $\boxed{}$

注意　答えは□枠の中に記入すること，導出の過程も記すこと．未記入の場合は 0 点！
電卓は利用可．携帯電話等を電卓代わりに利用することは不可

---

1. 一端を固定した直径 30mm，長さ 0.8m の丸棒について，以下の問に答えよ．ただし，この材料の縦弾性係数 $E = 206GPa$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする．

   (a) $70KN$ の引張り荷重が作用した場合に生じる応力，ひずみ，棒の伸びと直径の変化量をそれぞれ求めよ.（5 点 × 4 = 20 点）

   $$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4 \times 70 \times 1000}{\pi \cdot 30^2} = 99.0$$

   $$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{99.0}{206 \cdot 1000} = 0.000481$$

   $$\Delta L = \varepsilon L = 4.81 \times 10^{-4} \times 0.8 \times 1000 = 0.385$$

   $$\Delta d = -\varepsilon' d = -\nu\varepsilon d = -0.3 \times 4.81 \times 10^{-4} \times 30 = -0.00433$$

   応力 $\boxed{99.0}$ MPa ，ひずみ $\boxed{4.81 \times 10^{-4}}$

   伸び $\boxed{0.385}$ mm ，直径の変化 $\boxed{-0.00433}$ mm

   (b) 以下の表は，鋼材（SS 材）の規格の例である．安全率を 4 とし，引張り強さを基準強さとするとき，どの材料でこの丸棒を製作すればよいか．選択した理由とともに材料名を記せ.（10 点）

材料名	降伏応力 (MPa)	引張り強さ (MPa)
SS330	175 〜 205	330 〜 430
SS400	215 〜 245	400 〜 510
SS490	255 〜 285	490 〜 610
SS540	390	540

   引張り強さ σ_B を基準強さにとり，安全率を S とするとき，許容応力 σ_a は

   $$\sigma_a = \frac{\sigma_B}{S}$$

   負荷される応力は，許容応力以下でなくてはならないから

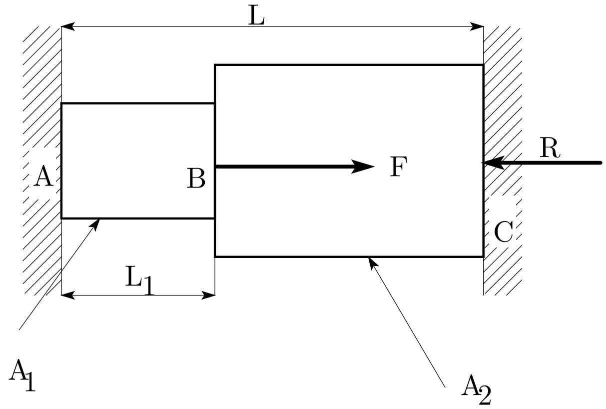
   $$\sigma < \sigma_a = \frac{\sigma_B}{S}$$

   $$\sigma_B > S \cdot \sigma = 4 \times 99.0 = 396.0$$

   表より，引張り強さが $396MPa$ 以上であるのは，SS400 材である．

   材料名 $\boxed{SS400}$

2. 両端固定された段付の丸棒に図のように荷重 $F = 6.5KN$ が加わっている．AC 間，BC 間の応力を求めよ．また，B 点の変位を求めよ．ただし，$L = 150mm$，$L_1 = 50mm$，断面積 $A_1 = 200mm^2$ ，$A_2 = 250mm^2$ ，縦弾性係数を $E = 200GPa$ とする．(30 点)



応力，ひずみ，のび，長さをそれぞれ AB 間について $\sigma_1, \varepsilon_1, \Delta L_1, L_1$ ，BC 間について $\sigma_2, \varepsilon_2, \Delta L_2, L_2$ とする．また壁から受ける反力を R とする（図参照）．

力のつりあい

$$\sigma_2 = -\frac{R}{A_2} \quad , \quad \sigma_1 = \frac{F-R}{A_1} \qquad (1)$$

材料特性（応力・ひずみ関係）

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad , \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \qquad (2)$$

変形の幾何学的関係

$$\Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 \quad , \quad \Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 \qquad (3)$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0 \qquad (4)$$

式 (4) に式 (3)(2) を代入し

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 L_2 = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{E} L_1 + \frac{\sigma_2}{E} L_2 = 0$$

$$\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 = 0$$

式 (1) を代入して

$$\frac{F-R}{A_1} L_1 - \frac{R}{A_2} L_2 = 0$$

$$R\left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right) = F\frac{L_1}{A_1}$$

これより未知反力は

$$R = \frac{F L_1}{A_1\left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right)} \qquad (5)$$

となる．

式 (5) に数値を代入して反力 R は

$$R = \frac{6.5 \times 1000 \times 50}{200 \times \left(\frac{50}{200} + \frac{100}{250}\right)} = 2500(N)$$

したがって応力は式 (1) から

$$\sigma_2 = -\frac{2500}{250} = -10(MPa)$$

$$\sigma_1 = \frac{6500 - 2500}{200} = 20(MPa)$$

と求められる．

また B 点の変位は，のび ΔL_1 に相当するから，式 (2)(3) から

$$\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 = \frac{\sigma_1}{E} L_1 =$$

$$= \frac{20}{200 \times 1000} \times 50 = 0.005(mm)$$

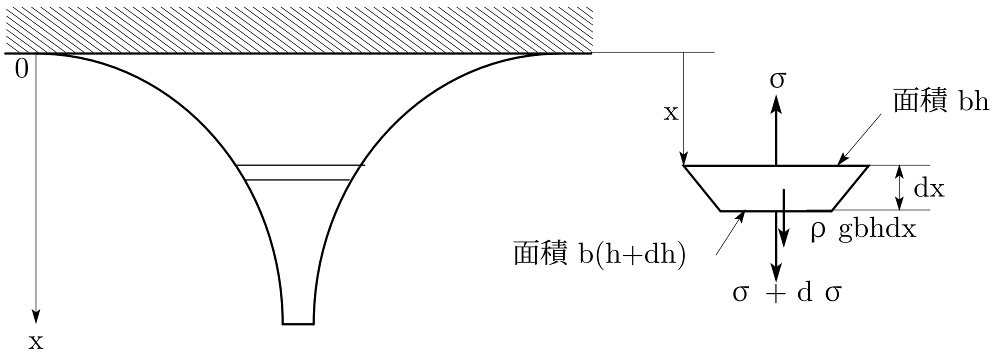
となる．

AB 間の応力 $\boxed{20}$ MPa ，BC 間の応力 $\boxed{-10}$ MPa

B 点の変位 $\boxed{0.005}$ mm

番号 ＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿

3. 図のような断面積 A が場所によって変化する棒がある．断面形状は長方形であり，厚さ b は一定で，幅 h が場所によって変化する $(A = bh)$．図の微小部分について，棒の自重を考慮して力のつりあい式を求めよ．また，自重によって棒に生じる応力 σ が場所によらず一定になるためには，幅をどのように変化させればよいか（幅 h を x の関数であらわせ）．ただし，$x = 0$ での幅を $h(0) = h_0$ とし，2 次の微小項（$d\sigma dh$ の積の項）は無視してよい．この棒の密度を ρ，重力加速度を g とせよ．(25 点)



図の微小部分に働く上向きの力は $\sigma \cdot b \cdot h$，下向きの力は $(\sigma + d\sigma) \cdot b \cdot (h + dh)$ と自重による力 $\rho g b h dx$ である．しがたがって力のつりあいは

$$(\sigma + d\sigma) \cdot b \cdot (h + dh) + \rho g b h dx = \sigma \cdot b \cdot h$$

これより

$$\sigma bh + d\sigma bh + \sigma b dh + d\sigma b dh + \rho g b h dx = \sigma bh$$

2 次の微小項は無視して

$$\sigma dh + h d\sigma + \rho g h dx = 0$$

したがって求めるつりあい式は以下のようになる．

$$\sigma \frac{dh}{dx} + h \frac{d\sigma}{dx} + \rho g h = 0$$

生じる応力が場所によらず一定の場合，$d\sigma/dx = 0$ が成り立ち，σ は定数となる．よって上式は

$$\sigma \frac{dh}{dx} + \rho g h = 0$$

となり，変形して

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\rho g}{\sigma} dx$$

これを積分すれば

$$\ln h = -\frac{\rho g}{\sigma} x + C \qquad C : \text{積分定数}$$

$x = 0$ で 幅は $h = h_0$ であるから，積分定数 C は

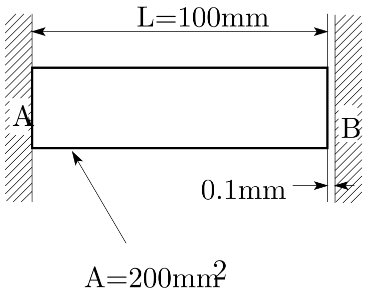
$$C = \ln h_0$$

と求めることができ，幅 h が

$$h(x) = h_0 \exp\left(-\frac{\rho g}{\sigma} x\right) = h_0 \, e^{(-\frac{\rho g}{\sigma} x)}$$

と変化することがわかる．

4. 図のように室温 (20 $°C$) で丸棒の一端が剛体壁に固定され，他端と剛体壁との間には $0.1mm$ のすきまが空いている．この状態から温度を上昇させるとき，丸棒に生じる熱応力が $-150MPa$ になる温度 $T°C$ はいくらか．　ただし，材料の縦弾性係数 E は $200GPa$ ，　線膨張係数 α は $10 \times 10^{-6}(1/°C)$ とする．（15 点)



温度が T_0 から $T_1°C$ まで上昇させたとき，$\Delta L = 0.1mm$ だけ棒が膨張し，剛体壁 B に接触したとする（この間は自由膨張であるから熱応力は発生しない）．このときの熱膨張によるのびは

$$\Delta L = \alpha \cdot (T_1 - T_0) \cdot L$$

$$T_1 = \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L} + T_0$$

棒が剛体壁に接触してからさらに加熱すると，棒の内部には熱応力が発生する．温度が T_1 から $T_2°C$ まで上昇したときに発生する熱応力 σ は

$$\sigma = -E\alpha \cdot (T_2 - T_1)$$

$$T_2 = -\frac{\sigma}{E\alpha} + T_1 = -\frac{\sigma}{E\alpha} + \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L} + T_0$$

これより数値を代入して

$$T_2 = \frac{150}{200 \times 1000 \times 10 \times 10^{-6}} + \frac{0.1}{10 \times 10^{-6} \times 1000} + 20 = 195$$

温度 $\boxed{195}$ $°C$

5. 講義の感想，コメントなど自由に（採点には無関係！）