材料力学　試験（'01 年度 第 1 回）

2001/12/14（金 2 限版）　得点

番号 　氏 名

注意　答えは□枠の中に記入すること，導出の過程も記すこと．未記入の場合は 0 点！
電卓は利用可．携帯電話等を電卓代わりに利用することは不可

---

1. 一端を固定した直径 20mm，長さ 0.5m の丸棒について，以下の問に答えよ．ただし，この材料の縦弾性係数 $E = 206GPa$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする．

(a) $25KN$ の引張り荷重が作用した場合に生じる応力，ひずみ，棒の伸びと直径の変化量をそれぞれ求めよ.（5 点 × 4 = 20 点）

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4 \times 25 \times 1000}{\pi \cdot 20^2} = 79.6$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{79.6}{206 \cdot 1000} = 0.000386$$

$$\Delta L = \varepsilon L = 3.86 \times 10^{-4} \times 0.5 \times 1000 = 0.193$$

$$\Delta d = -\varepsilon' d = -\nu\varepsilon d = -0.3 \times 3.86 \times 10^{-4} \times 20 = -0.00232$$

応力 $\boxed{79.6}$ MPa ，ひずみ $\boxed{3.86 \times 10^{-4}}$

伸び $\boxed{0.193}$ mm ，直径の変化 $\boxed{-0.00232}$ mm

(b) 以下の表は，鋼材（SS 材）の規格の例である．安全率を 3 とし，降伏応力を基準強さとするとき，どの材料でこの丸棒を製作すればよいか．選択した理由とともに材料名を記せ.（10 点）

材料名	降伏応力 (MPa)	引張り強さ (MPa)
SS330	175 〜 205	330 〜 430
SS400	215 〜 245	400 〜 510
SS490	255 〜 285	490 〜 610
SS540	390	540

降伏応力 σ_Y を基準強さにとり，安全率を S とするとき，許容応力 σ_a は

$$\sigma_a = \frac{\sigma_Y}{S}$$

負荷される応力は，許容応力以下でなくてはならないから

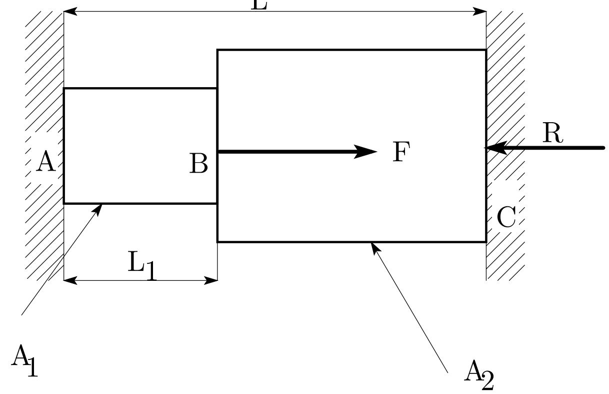
$$\sigma < \sigma_a = \frac{\sigma_Y}{S}$$

$$\sigma_Y > S \cdot \sigma = 3 \times 79.6 = 238.8$$

表より，降伏応力が $239MPa$ 以上であるのは，SS490 材である．

材料名 $\boxed{SS490}$

2. 両端固定された段付の丸棒に図のように荷重 $F = 7KN$ が加わっている．AC 間，BC 間の応力を求めよ．また，B 点の変位を求めよ．ただし，$L = 150mm$，$L_1 = 50mm$，断面積 $A_1 = 100mm^2$，$A_2 = 150mm^2$，縦弾性係数を $E = 200GPa$ とする．(30 点)



応力，ひずみ，のび，長さをそれぞれ AB 間について $\sigma_1, \varepsilon_1, \Delta L_1, L_1$，BC 間について $\sigma_2, \varepsilon_2, \Delta L_2, L_2$ とする．また壁から受ける反力を R とする（図参照）．

力のつりあい

$$\sigma_2 = -\frac{R}{A_2} \quad , \quad \sigma_1 = \frac{F-R}{A_1} \tag{1}$$

材料特性（応力・ひずみ関係）

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad , \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \tag{2}$$

変形の幾何学的関係

$$\Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 \quad , \quad \Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 \tag{3}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0 \tag{4}$$

式 (4) に式 (3)(2) を代入し

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 L_2 = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{E} L_1 + \frac{\sigma_2}{E} L_2 = 0$$

$$\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 = 0$$

式 (1) を代入して

$$\frac{F-R}{A_1} L_1 - \frac{R}{A_2} L_2 = 0$$

$$R\left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right) = F\frac{L_1}{A_1}$$

これより未知反力は

$$R = \frac{F\,L_1}{A_1\left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right)} \tag{5}$$

となる．

式 (5) に数値を代入して反力 R は

$$R = \frac{7 \times 1000 \times 50}{100 \times \left(\frac{50}{100} + \frac{100}{150}\right)} = 3000(N)$$

したがって応力は式 (1) から

$$\sigma_2 = -\frac{3000}{150} = -20(MPA)$$

$$\sigma_1 = \frac{7000 - 3000}{100} = 40(MPa)$$

と求められる．

また B 点の変位は，のび ΔL_1 に相当するから，式 (2)(3) から

$$\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 = \frac{\sigma_1}{E} L_1 =$$

$$= \frac{40}{200 \times 1000} \times 50 = 0.01(mm)$$

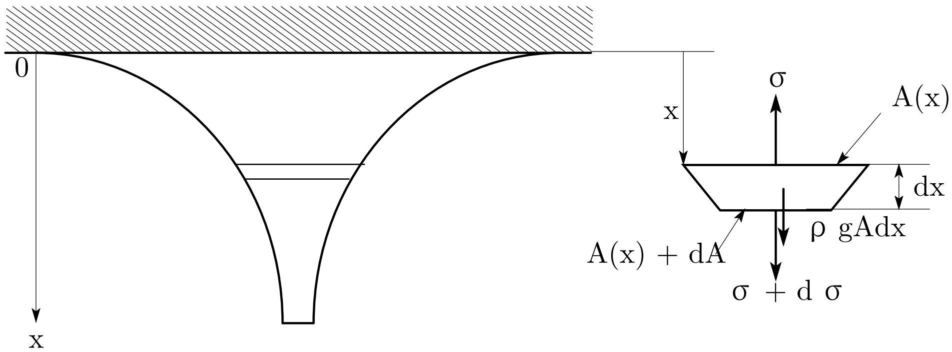
となる．

AB 間の応力 $\boxed{40}$ MPa , BC 間の応力 $\boxed{-20}$ MPa

B 点の変位 $\boxed{0.01}$ mm

番号 氏 名

3. 図のような断面積 A が場所によって変化する棒がある．図の微小部分について，棒の自重を考慮して力のつりあい式を求めよ．また，自重によって棒に生じる応力 σ が場所によらず一定になるためには，断面積をどのように変化させればよいか（断面積 A を x の関数であらわせ）．ただし，$x=0$ の断面積を $A(0)=A_0$ とし，2 次の微小項（$d\sigma dA$ の積の項）は無視してよい．この棒の密度を ρ，重力加速度を g とせよ．(25 点)



図の微小部分に働く上向きの力は $\sigma \cdot A$，下向きの力は $(\sigma+d\sigma)\cdot(A+dA)$ と自重による力 $\rho gAdx$ である．しがたがって力のつりあいは

$$(\sigma+d\sigma)\cdot(A+dA)+\rho gAdx=\sigma\cdot A$$

これより

$$\sigma A+d\sigma A+\sigma dA+d\sigma dA+\rho gAdx=\sigma A$$

2 次の微小項は無視して

$$\sigma dA+Ad\sigma+\rho gAdx=0$$

したがって求めるつりあい式は以下のようになる．

$$\sigma\frac{dA}{dx}+A\frac{d\sigma}{dx}+\rho gA=0$$

生じる応力が場所によらず一定の場合，$d\sigma/dx=0$ が成り立ち，σ は定数となる．よって上式は

$$\sigma\frac{dA}{dx}+\rho gA=0$$

となり，変形して

$$\frac{dA}{A}=-\frac{\rho g}{\sigma}dx$$

これを積分すれば

$$\ln A=-\frac{\rho g}{\sigma}x+C \qquad C: 積分定数$$

$x=0$ で 断面積は $A=A_0$ であるから，積分定数 C は

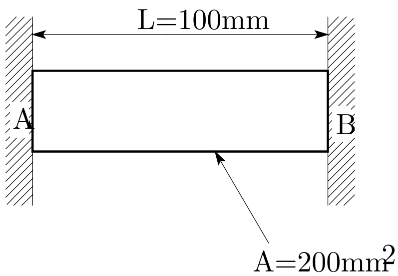
$$C=\ln A_0$$

と求めることができ，断面積が

$$A(x)=A_0\exp\left(-\frac{\rho g}{\sigma}x\right)=A_0\,e^{(-\frac{\rho g}{\sigma}x)}$$

と変化することがわかる．

4. 図のように室温 (20 °C) で丸棒が両端の剛体壁に無理なく固定されている．この状態から温度を上昇させるとき，熱応力によって棒が塑性変形を開始する温度 T°C はいくらか．ただし，この丸棒は SS540 材（問 1．の表参照）で製作されており，縦弾性係数 E は 206GPa ，線膨張係数 α は $11 \times 10^{-6}(1/°C)$ ，材料特性値はいずれも温度によって変化しないものとする．また引張りと圧縮において材料特性が変化しないものとする．(15 点)



温度が T_0 から T°C まで上昇したとき，棒に生じる熱応力 σ は

$$\sigma = -E\alpha \cdot (T - T_0)$$

一方，SS540 材が引張りで塑性変形を開始するのは，降伏応力 $\sigma_Y = 390MPa$ のときであり，圧縮では $-\sigma_Y = -390MPa$ で塑性変形を開始するから，

$$-\sigma_Y = -E\alpha \cdot (T - T_0)$$

$$T = \frac{\sigma_Y}{E\alpha} + T_0$$

これより数値を代入して

$$T = \frac{390}{206 \times 1000 \times 11 \times 10^{-6}} + 20 = 192.1$$

温度 $\boxed{192.1}$ °C

5. 講義の感想，コメントなど自由に（採点には無関係！）