量子エレクトロニクス レポート解答（３ b のみ）

問題 3-(b)

コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

について、消滅演算子 $\hat{a}$ を作用させたときに生じる状態を、振幅の大きさを含めて求めよ。また、コヒーレント状態に位相シフト演算子 $\hat{L}(\phi) \equiv \exp(\mathrm{i}\phi\hat{n})$ を作用させたときに生じる状態を、振幅の大きさを含めて求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a}\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\left\{\frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}}\hat{a}|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle\right\}\cdots(0\text{ だけ別に考える。}\hat{a}|0\rangle = 0) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}\sqrt{(n-1)!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle\cdots(n-1\to n'\text{ に置き換え。}) \\
&= \alpha\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}}|n'\rangle\cdots(\text{コヒーレント状態に戻る。}) \\
&= \alpha|\alpha\rangle
\end{aligned}$$

$|\alpha\rangle$ は消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態で、固有値は α ということを表す。

$$\begin{aligned}
\hat{L}(\phi)|\alpha\rangle &= \hat{L}(\phi)\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \exp(\mathrm{i}\phi\hat{n})\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(\mathrm{i}\phi\hat{n})|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(\mathrm{i}\phi n)|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\left(e^{\mathrm{i}\phi}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha e^{\mathrm{i}\phi}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\alpha e^{\mathrm{i}\phi}\right|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha e^{\mathrm{i}\phi}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= |\alpha e^{\mathrm{i}\phi}\rangle
\end{aligned}$$

$\alpha \to \alpha e^{\mathrm{i}\phi}$ のように α を置き換えた状態に変化している。α は古典電磁波の複素振幅に相当するので、これは位相が ϕ ずれた状態に変化したことを表す。