

力学演習

物理システム工学科 1 年次

2007 年度

(月曜日・2 限)

- 場所

L0016 番教室 (A クラス : 偶数番) , L0017 番教室 (B クラス : 奇数番)

- 担当

	電話番号	メールアドレス	居室
本橋健次	042-388-7426	motohasi@cc.tuat.ac.jp	4 号館 432 室
小田勝	042-388-7428	odamasa@cc.tuat.ac.jp	4 号館 539 室

- 日程

前半 : 小田 A、本橋 B

後半 : 本橋 A、小田 B

- 授業の進め方

時間	内容	備考
10:30~11:40	各自、問題解答	質問可
11:40~11:50	模範解答の説明	自己採点
11:50~12:00	質疑	自己添削後、提出

注意

- 演習固有の試験は行わない。(講義の試験に含める。) 試験、レポート、出席を総合的に評価する。
- 各回の演習問題を 70 分間で解答する。質問は随時受け付けるが、学生同士で相談したりすることはできない。講義ノートを見ることは構わない。
- 毎回、関数電卓を持参すること。
- 解答終了後、模範解答を液晶プロジェクターで示すので、自己採点する。赤鉛筆または赤ボールペンを必ず持参すること。
- 最後の 10 分間に質疑応答を行う。解答用紙に添削を加えた後、提出する。提出された解答用紙は検印を押して翌週の授業で返却する。(検印が出席代わりになる。)
- 前半と後半の終了時点で、それまでの解答用紙をひとまとめにして提出する。返却された解答用紙は紛失しないよう、各自で管理しておくこと。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

1. 座標系とベクトル

1 ベクトルの座標表示に関して次の問に答えよ。

(1) ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して、 a の表す点を直交座標系の上に図示せよ。

また、ベクトル a を、ベクトル e_1, e_2, e_3 の線型結合で書き表せ。ただし e_1, e_2, e_3 は x, y, z 軸正方向の単位ベクトルとする。

(2) ベクトル $b = -2e_1 + e_2 + 4e_3$ のとき、 b の終点の座標を求め、直交座標系上に図示せよ。

2 点 A の座標を $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、点 B の座標を $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたとき、A からみた B の

座標、B からみた A の座標を示せ。また、原点 O を始点、点 A および B を終点とするベクトルを $a = \overrightarrow{OA}$ および $b = \overrightarrow{OB}$ としたとき、以下のベクトルで表される点の座標を示せ。

$$\begin{aligned} & a + b, & a - b, & b - a \\ & 3a, & -2b, & a + 2b \\ & 5a - 3b, & 2a - xb, & aa - 3\beta b \end{aligned}$$

3 2次元空間において、ベクトル $a = e_x + e_y$ の終点を A、ベクトル $b = 2e_x - e_y$ の終点を B として以下の問に答えよ。ただし、 e_x, e_y はそれぞれ x 軸および y 軸正方向の単位ベクトルとする。

(1) ベクトル a および b を 2次元直交座標系上に図示せよ。

(2) 点 A、B を結ぶ直線上の点 P の座標を、媒介変数 γ を用いて書き表せ。次に、媒介変数を消去することにより直線の方程式を求めよ。

(3) 点 P を表すベクトルを $p = \overrightarrow{OP}$ としたとき、 p を e_x, e_y の線型結合として書き表せ。(すなわち、 $p = a(t)e_x + b(t)e_y$ と書いたとき、関数 $a(t), b(t)$ を求めよ。)

4 (発展問題) 3次元空間において、ベクトル $a = e_x + e_y + e_z$ の終点を A、ベクトル $b = 2e_x + 2e_y$ の終点を B として以下の問に答えよ。ただし、 e_x, e_y, e_z はそれぞれ x 軸、 y 軸および z 軸正方向の単位ベクトルとする。

(1) 点 A、B を結ぶ直線上の点 P の座標を、媒介変数 γ を用いて書き表せ。次に、媒介変数を消去することにより直線の方程式を求めよ。

(2) ベクトル $c = 2e_x + e_y - e_z$ の終点を C とする。点 A、B、C を含む平面上の点 P の座標を、2つの媒介変数 γ, δ を用いて書き表せ。次に、媒介変数を消去することにより平面の方程式を求めよ。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

2. 位置、速度、加速度

1 次の物理量の単位 (SI) および次元 (dimension) を書け。

- (1) 距離 (2) 体積 (3) 密度 (4) 速度
 (5) 運動量 (6) 仕事 (7) 力 (8) 仕事率

2 位置 x が、 $x(t) = t + \frac{1}{a} \exp(-at)$ によって与えられるとき、速度 $v(t)$ を計算せよ。また、 $t \rightarrow \infty$ における速度 v_∞ はどうなるか。

ただし、指数関数は無限級数

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

で定義されるものとする。

3 ある質点の時刻 t における位置ベクトルが

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

で与えられたとする。

- (1) 時刻 $t = 2 \text{ s}$ から時刻 $t = 3 \text{ s}$ の間での平均速度ベクトルを求めよ。
 (2) 時刻 $t = 2 \text{ s}$ から時刻 $t = 2.1 \text{ s}$ の間での平均速度ベクトルを求めよ。
 (3) 時刻 $t = 2 \text{ s}$ の瞬間の速度ベクトルを求めよ。
 (4) 任意の時刻 t における速度ベクトルを求めよ。
 (5) 問 (4) の速度ベクトルを用いて、時刻 $t = 2 \text{ s}$ から時刻 $t = 3 \text{ s}$ の間での平均加速度ベクトルを求めよ。
 (6) 時刻 $t = 2 \text{ s}$ から時刻 $t = 2.1 \text{ s}$ の間での平均加速度ベクトルおよび任意の時刻の加速度ベクトルを求めよ。

4 質量 m をもつある質点の位置が

$$x(t) = a \cos(\omega t), \quad y(t) = a \sin(\omega t) \quad (\omega = \text{一定 } t: \text{時間})$$

で与えられるものとする。ただし、 $a = 5$ 、 $\omega = 1$ とする。

- (1) $t = \pi/2, 3\pi/4, 4\pi/3$ における位置ベクトルを図示せよ。
 (2) 上記のそれぞれの時刻における質点の速度および加速度ベクトルを求めよ。
 (3) 加速度 (または力) ベクトルは速度ベクトルと直交し、位置ベクトルとは反平行 (平行で逆符号) となることを示せ。また、上記の時刻でこの関係が成り立っていることを図示せよ。
 (4) どのような力が (3) で示した性質を持っているか、例を挙げて説明せよ。

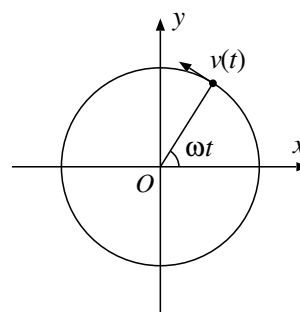


図 2-4

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

3. 1次元の運動（ニュートンの運動方程式）

1 次の状況において、加速度や加わっている力などを指示に従い求めよ。ただし、加速度は一定と近似できるとする。

- (1) 1.5 t の自動車を 100 kgw で押したときの加速度を求めよ（単位は任意）。
- (2) 車重 500 kg の F1 が 0-100 キロ加速（静止状態から時速 100 km まで加速するのに要する時間）が 3.0 s であるとき、加速度の大きさ（単位 m/s^2 ）および加わる力（単位は N と kgw の両方）を求めよ。
- (3) 体重 17 g のツバメが時速 100 km で直線上に飛んできて、0.5 s の間に逆方向に折り返す（燕返し）とき、ツバメに加わる力を求めよ（単位は N と kgw の両方）。

2 x 軸上の質量 m の質点 P の運動が $x = a + bt$ で与えられるとする。（ a 、 b は定数、 t は時刻）

- (1) 定数 a 、 b の次元と SI における単位を示せ。
- (2) x と t の関係をグラフに示せ。（横軸を t 、縦軸を x にとること。）
- (3) 時刻 t における速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ 、質点に加わる力 $F(t)$ を求めよ。
- (4) 初期条件が $x(0) = 2.5 \text{ m}$ 、 $v(0) = -0.7 \text{ m/s}$ のとき、定数 a 、 b を定めよ。

3 x 軸上を運動する質量 m の質点 P に、 $F(t) = F_0$ の一定の力が加わっているとする。

- (1) 質点 P の運動方程式を示せ。
- (2) 時刻 t における速度 $v(t)$ 、位置 $x(t)$ を求めよ。（一般解）
- (3) 時刻 $t = 0$ において、位置は $x(0) = x_0$ 、速度は $v(0) = v_0$ であった。任意の時刻 t における P の位置 $x(t)$ を求めよ。
- (4) $F(t)$ 、 $v(t)$ 、 $x(t)$ をグラフに示せ。（横軸を t にとること。）

4 x 軸上を運動する質量 m の質点 P に、右図に示すように $F(t) = F_0 - \alpha t$ で表される、時刻によって変化する力が加わっているとする。（ただし $F_0 > 0$ 、 $\alpha > 0$ ）

- (1) 質点 P の運動方程式を示せ。
- (2) 時刻 t における速度 $v(t)$ 、位置 $x(t)$ を求めよ。（一般解）
- (3) 時刻 $t = 0$ において、位置は $x(0) = 0$ 、速度は $v(0) = 0$ であった。任意の時刻 t における P の位置 $x(t)$ を求めよ。
- (4) $F(t)$ 、 $v(t)$ 、 $x(t)$ をグラフに示し、お互いの変曲点、極大極小の点、零点の位置の関係を示せ。（横軸を t にとること。）

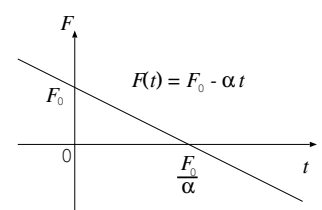


図 3-4

演習名	担当教官	実施日	自己評価
力学演習		年 月 日	

4. 3次元の運動（ニュートンの運動方程式）

1 3次元の自由空間（外力が全く加わらない空間）において質量 m の質点 A が運動している場合を考える。質点の位置ベクトルを $r(t)$ とする。（ r が太字であることに注意せよ。）

- (1) 質点 A の運動方程式を示せ。
- (2) 時刻 t における速度 $v(t)$ 、位置 $r(t)$ を求めよ。（ v が太字であることに注意せよ。）
- (3) 時刻 $t = 0$ において、質点 A の位置は $r(0) = (2, 1, -3)$ 、速度は $v(0) = (0, -1, 2)$ であった。 $t = 3$ の時刻における A の位置を求めよ。
- (4) 時刻 $t = 0$ において質点 A の位置は $r(0) = (2, 1, -3)$ 、時刻 $t = 2$ において質点 A の位置は $r(2) = (0, -1, 1)$ であった。時刻 $t = 4$ における A の位置および速度ベクトルを求めよ。（スペースの都合上ベクトルは行ベクトルで与えてあるが、解答にあたっては列ベクトルを用いてよい。）

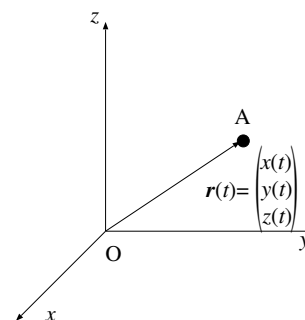


図 4-1

2 3次元空間中において質量 m の質点 A に対して、時刻、位置に関係なく一定の力 $F = (0, 0, -F_z)$ が加わっているとす。ただし $F_z > 0$ 座標の取り方は、図 4-1 と同様とする。

- (1) 質点 A の運動方程式を示せ。
- (2) 任意の時刻 t における質点 A の位置 $r(t)$ を求めよ。
- (3) 質点 A は実は質量 45 g のゴルフボールであった。ゴルフ場でのゴルフボールに加わる重力の大きさ F_z を、N を単位として求めよ。ただし、そのゴルフ場における重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。
- (4) 原点 O にティーグラウンドがあり、 x 軸上 O から 250 m の位置にカップが切っていたとする。ホールインワンを狙う場合のボールの初期の速度ベクトルを求めよ。ただし 1 番ウッドで出せる初速は時速 200 キロメートルとし、空気抵抗等ややこしいものはいっさい無視できるとする。

3 図に示すように、電荷 $Q (> 0)$ に帯電した質量 m の物体が、静電気力と重力を受けながら運動するとす。平行電極の間には一様な電場 $E = V_0/d$ が発生し、電荷 Q を持つ物体に対して QE の力が働く。

- (1) 力の方向に注意して、静電気による力のベクトル F_E 、重力による力のベクトル F_g および合力のベクトル F を求めよ。
- (2) 物体の運動方程式を求めよ。
- (3) 物体の任意の時刻 t における位置 $r(t)$ を求めよ。
- (4) (発展問題) 時刻 $t = 0$ に原点 O から真上 (z 軸正方向) に物体を打ち上げた場合、 xz 平面内で物体はどのような軌道を描くか定性的に考えてみよ。

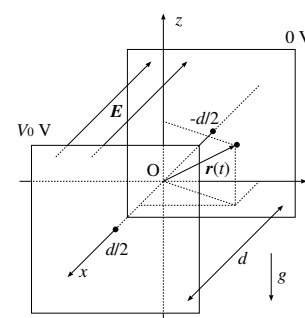


図 4-3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

5. 三角関数、指数関数と調和振動の基礎

1 三角関数について各問に答えよ。

(1) 次の三角関数を指数関数で書き表せ。

$$\sin \alpha = ? \quad \cos \beta = ?$$

(2) 次の三角関数を、 $\sin \alpha$ 、 $\cos \xi$ などの変数を一つだけ含む三角関数に展開せよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = ? \quad \cos(\alpha - \beta) = ? \quad \cos 2\tau = ? \quad \sin 3\xi = ?$$

(3) 次の三角関数の和を一つの三角関数で表わせ。

$$\sin x + \cos x = ? \quad \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = ?$$

(4) 次の関数を [] の中の変数についての関数とみなし、(その他は定数とみなし) それぞれの導関数 (微分) 原始関数 (積分) を求めよ。

$$\sin x [x], \quad \cos(-2x) [x], \quad \sin(\omega t) [t], \quad \cos(\omega t) [\omega]$$

2 指数関数について各問に答えよ。

(1) 次の指数関数を複素平面上にプロットせよ。

$$3 \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) \quad -2 \exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right) \quad \exp(\pi i) \quad \exp\left(\frac{n\pi}{3}i\right) (n \text{ は整数})$$

(2) 次の指数関数を三角関数で書き表せ。

$$\exp(i\theta) = ? \quad \exp(-i\omega t) = ? \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = ? \quad 2(e^{ikz} - e^{-ikz}) = ?$$

(3) 次の関数をグラフに書き表せ。

$$\operatorname{Re}\{\exp(2xi)\} \quad \operatorname{Im}\left\{\exp\left(-\frac{t}{3}i\right)\right\}$$

(4) 次の関数について [] 内の変数に関する導関数および原始関数を求めよ。([] 以外のものは定数とみなせ。)

$$e^x [x], \quad \exp(-2t) [t], \quad e^{kx} [x], \quad \exp(-2it) [t]$$

3 右図に示すように、天井からバネ定数 k のバネをつるし、その先に質量 m の重りをぶら下げた。天井の位置を 0 とし、天井から鉛直下向きに z 軸をとり、この座標で重りの位置を表わすことにする。

(1) バネ定数の次元と SI における単位を示せ。

(2) 重りに加わる重力 F_g と、バネが重りに加える力 F_s とが釣り合う場合の重りの位置 z_0 を求めよ。ただし、重力加速度を g 、バネの自然長を l_0 とする。

(3) 重りの運動方程式を求めよ。

(4) 重りの運動の一般解 $z(t)$ を求めよ。また重りの運動の周期 T を求めよ。

(5) 力の釣り合いの位置から Δl だけ重りを引っ張って $t = 0$ の瞬間に手を離れた。その後の重りの運動を求めよ。

(6) 同じ重りを複数個取りつけて運動させた。重りの個数を 1, 2, 3, ... 個に変えたとき、重りの個数と運動の周期 T の関係をグラフに示せ。また、重りは 1 個のまま同じバネを複数個直列につないだとき、バネの本数と運動の周期 T の関係をグラフに示せ。

ギリシャ文字

A	α	アルファ (alpha)
B	β	ベータ (beta)
Γ	γ	ガンマ (gamma)
Δ	δ	デルタ (delta)
E	ε	イプシロン (epsilon)
Z	ζ	ゼータ (zeta)
H	η	イータ (eta)
Θ	θ	シータ (theta)
I	ι	イオタ (iota)
K	κ	カッパ (kappa)
Λ	λ	ラムダ (lambda)
M	μ	ミュー (mu)
N	ν	ニュー (nu)
Ξ	ξ	クサイ・クシー (xi)
O	\omicron	オミクロン (omicron)
Π	π	パイ (pi)
P	ρ	ロー (rho)
Σ	σ	シグマ (sigma)
T	τ	タウ (tau)
Υ	υ	ウプシロン (upsilon)
Φ	ϕ	ファイ (phi)
X	χ	カイ (chi)
Ψ	ψ	プサイ (psi)
Ω	ω	オメガ (omega)

$\operatorname{Re}(z)$: 複素数 z の実部
 $\operatorname{Im}(z)$: 複素数 z の虚部

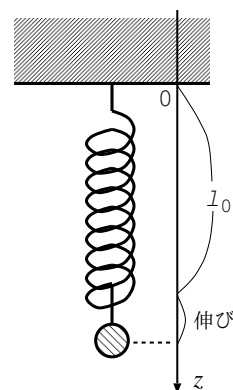


図 5-3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

6. 調和振動その1: 自由振動

1 右図に示すように天井から長さ L の糸で質量 m の重りが吊されている。重力加速度を g として各問に答えよ。ただし糸の質量は無視できるものとする。

- (1) 右図に示すように、重りが鉛直方向から θ (rad) の角度に振れた瞬間の重りの位置の x 座標、 y 座標を求めよ。
- (2) 上の瞬間の、糸の張力を求めよ。また、この時の張力と重力の合力(すなわち重りに加わっている力の全ての和)のベクトルを求めよ。
- (3) 微小な角度 θ では、 $\sin \theta \approx \theta$ 、 $\cos \theta \approx 1$ と近似できる。これを利用して、重りの合力の x 成分を求めよ。
- (4) 角度 θ が非常に小さいとき(上の近似が成り立つとき)、重りの x 軸方向の運動方程式を立て、その一般解を求めよ。

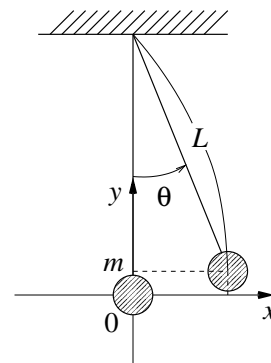


図 6-1

2 右図に示すように、質量 M の船が水上に浮かんでいるとする。鉛直上向きを z 軸とし、浮力と重力が釣り合う位置を $z = 0$ にとる。

- (1) 船を上から押さえて、力の平衡の位置から下向きに d [m] だけ押し込んだとする。(船の重心の座標は $z = -d$) このとき、船が余計に押しつけた水の体積を求めよ。ただし船の水平面内の断面積を S [m^2] とする。
- (2) 浮力は物体が押しつけた水に加わる重力と大きさが一致する。(1)において下向きに加えた力の大きさを kgw および N を単位として求めよ。ただし、水の密度を ρ kg/m^3 、重力加速度を g m/s^2 とする。
- (3) 始め、船が静止していたところへ、 $t = 0$ において体重(質量) m [kg] の人が乗り込んだ。船 + 人の上下運動の運動方程式を示し、 $t = 0$ 以後の船の運動を求めよ。(人が乗り込むことによって平衡位置が下にずれることに着目せよ。)

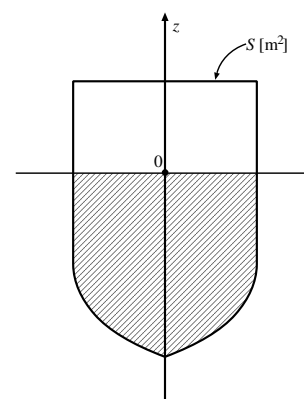


図 6-2

3 (発展問題、調和振動もどき) 質量 m の質点が一次元運動をする場合を考える。(座標軸を x 軸とする。) $x < 0$ の領域では x 正の向きに一定の力 F が加わり、 $x > 0$ の領域では x 負の向きに同じ大きさの一定の力、すなわち $-F$ が加わるとする。(V字型ハーフパイプでスノーボードで往復すればこのような状況になる。)

- (1) $x > 0$ の領域および $x < 0$ の領域での運動方程式を示せ。
- (2) $x > 0$ の領域での一般解を求めよ。
- (3) 領域 $x > 0$ から領域 $x < 0$ へ移る瞬間、 $x = 0$ をよぎる直前、直後では速度が保存される。このことを利用して、往復運動の様子をグラフにせよ(横軸 t 、縦軸 x)。ただし、 $x > 0$ の領域で $x = 0$ からもっとも遠ざかったときの距離を a とする。
- (4) 上の場合の位置往復に要する時間 T を求めよ。また最も遠ざかる距離が $2a$ の場合の T を求めよ。

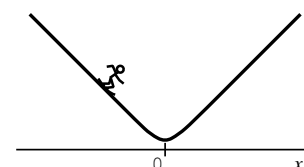


図 6-3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

7. 調和振動その2: 減衰振動、強制振動

1 図 7-1 に示すように、自然長 l_0 、バネ定数 k のバネに質量 m の重りがつな
がれている。重りに対しては、バネによる力の他に、速度に比例する粘性
力 $-\mu\dot{x}(= -\mu\frac{dx}{dt})$ が働くとする。

- (1) μ および k の次元、および SI における単位を示せ。
- (2) 運動方程式を示し、解を $x(t) = \exp(\lambda t)$ と仮定して、一般解を求めよ。
ただし、 $\mu < 2\sqrt{mk}$ の場合とする。(講義の方法)
- (3) 解を $x(t) = A \exp(-at) \cos(\omega t + \phi)$ (a, ω は実) と仮定して運動方程式
に代入し、運動方程式を満たすことを示せ。また、運動方程式が成り
立つときの a, ω を定めよ。(m, k, μ をもちいて表わせ。) ただし、
 $\mu < 2\sqrt{mk}$ の場合とする。
- (4) 車重 1 トンの車を 4 つのタイヤで支えている (タイヤ 1 個に着目する
と 250 kg を支えている)。このとき、サスペンションのバネはバネレ
ートが 7 kgw/mm であった。この場合について、(i) バネレートの単位を
SI にせよ。(ii) 車体の自由振動時の振動周期を求めよ。(iii) 外乱に対
して最も早く車体を平衡点に戻すのに必要なダンパーのダンピングレ
ート μ を選べ。(市販されているダンパーのレートは、100 mm/s のとき、
100 lbs~300 lbs のものがあるようである。1 lbs(1 ポンド)=0.45 kgw)

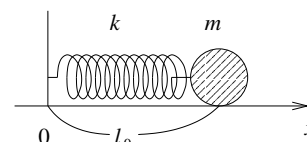


図 7-1

2 図 7-2 に示すように自然長 l_0 、バネ定数 k のバネに質量 m の重りをつなぐ。
重りに対しては、バネによる力の他に、速度に比例する粘性力 $-\mu\dot{x}(= -\mu\frac{dx}{dt})$
が働いている。バネを固定した壁が、左右に $x_w(t) = x_0 \cos \omega_w t$ で動いてい
るものとする。

- (1) 時刻 t における重りの位置を $x(t)$ としたとき、重りに加わる力を求
めよ。
- (2) $z(t) \equiv x(t) - l_0$ としたとき、重りの運動方程式を $z(t)$ を用いて示せ。
- (3) 一般解、および特解を求めよ。($z(t)$ のままでよい。)
- (4) $x_0 = 0.1$ m、 $\omega_w = 1.5$ rad/s、 $l_0 = 2$ m、 $m = 1$ kg、 $k = 1$ N/m、 $\mu = 0$
N·s/m のとき、初期条件 $z(0) = 0.2$ m、 $dz/dt(0) = 0$ m/s を満たす解を
求めよ。($z(t)$ のままでよい。)

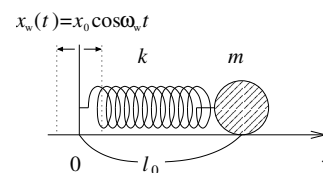


図 7-2

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

8. 仕事

1 次の各問に答えよ。(内積の復習)

- (1) $a = (2, 3, -1)$ と $b = (-3, 1, 2)$ の内積 $a \cdot b$ を求めよ。
- (2) $a = -2e_1 + e_2 + 4e_3$ と $b = -e_1 + e_2 - e_3$ の内積 $a \cdot b$ を求めよ。
- (3) ベクトル a, b の大きさが、 $|a| = 2, |b| = 3$ 、両者のなす角が $\theta = 2\pi/3$ のとき内積 $a \cdot b$ を求めよ。
- (4) $a = (2, 1, -1)$ と $b = (-3, 1, 2)$ の両方に垂直な長さ 1 のベクトル c を求めよ。
- (5) ベクトル $a = (2, 3, -1)$ から $b = (-3, 1, 2)$ へ射影して得られるベクトル c を求めよ。

2 x 軸方向にのみ移動可能な物体に、 x 軸方向の力が働いている場合を考える。力が図 8-2 に示すように与えられている場合の、力が物体に対してした仕事をそれぞれ求めよ。

- (1) (a) において、原点から $x = a$ まで移動させた場合。
- (2) (a) において、 $x = b$ から $x = a$ まで移動させた場合。
- (3) (a) において、 $x = b$ から $x = c$ まで移動させた場合。
- (4) (a) において、 $x = c$ から $x = b$ まで移動させた場合。
- (5) (a) において、原点から $x = c$ まで移動させた場合。
- (6) (b) において、原点から $x = b$ まで移動させた場合。
- (7) (b) において、 $x = b$ から $x = a$ まで移動させた場合。
- (8) (c) において、原点から $x = a$ まで移動させた場合。
- (9) (d) において、 $x = b$ から $x = a$ まで移動させた場合。

3 図 8-3 に示すように、2次元平面内において、 $x > 0$ の領域では $F_1 = (f_1, 0)$ の一様な力が、 $x \leq 0$ の領域では $F_2 = (0, f_2)$ の一様な力が働いているとする。(ただし、 $f_1 > 0, f_2 > 0$ とする。) このとき、下記の条件で物体を移動させた場合に力のした仕事を求めよ。

- (1) 物体を $(1, 1)$ から $(3, 1)$ へ直線上を移動させた場合。
- (2) 物体を $(-1, 1)$ から $(-1, -3)$ へ直線上を移動させた場合。
- (3) 物体を $(1, 1)$ から $(1, 3)$ へ直線上を移動させた場合。
- (4) 物体を原点から $(3, 3)$ へ直線上を移動させた場合。
- (5) 物体を原点から $(-3, -3)$ へ直線上を移動させた場合。
- (6) 物体を $(-1, 1)$ から $(1, 1)$ へ直線上を移動させた場合。
- (7) 物体を $(-1, -1)$ から $(-1, 1), (1, 1), (1, -1)$ を経由して、 $(-1, -1)$ に戻るように移動させた場合。(各点間は直線上に動かす。)

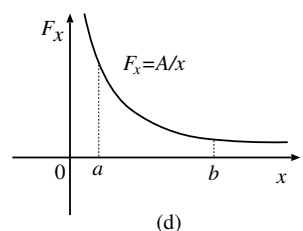
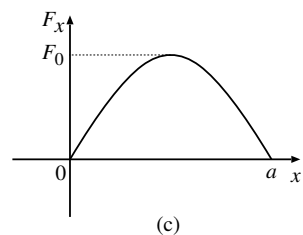
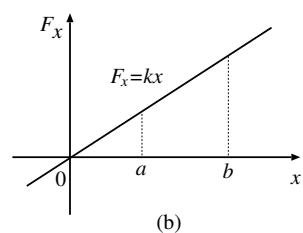
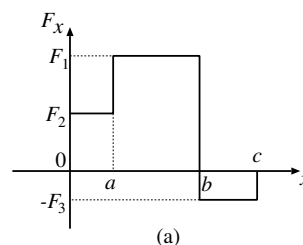


図 8-2

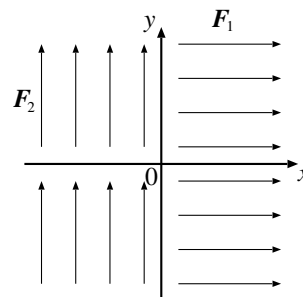


図 8-3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

9. エネルギーとエネルギー保存則

1 次の各問に答えよ。

- (1) 位置エネルギーを考えるときの基準点自身に物体があるときの位置エネルギーはどのような大きさか示せ。
- (2) 「演習 No. 8 の問 [3]」の図 8-3 に示される力の場について、保存力かどうかを議論しなさい。
- (3) 電荷 q_1 と q_2 が距離 r を隔てておいてあるとき、電気力学的な位置エネルギーは

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

で与えられる。 $(\epsilon_0$ は真空の誘電率という定数。高校で習う k_0 とは $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$ の関係がある。) 今、座標系の原点 O に正電荷 $+Q$ が固定されているとする。このとき、電荷 q (ただし $q > 0$) の電荷を $r = (x, y, z)$ においた場合にこの電荷に働く静電気力のベクトルを求めよ。

2 図 9-2 に示すように、原点から 45° の角度で質量 m の物体を初速度 v_0 で打ち上げた。重力は鉛直下向き、重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。

- (1) 物体の運動方程式を示し、一般解および具体的な解を求めよ。
- (2) 任意の時刻 t における位置エネルギーと運動エネルギーをもとめ、力学的エネルギー保存の法則が成り立っていることを示せ。
- (3) 物体が最も高く上昇した瞬間の、物体の高さ、物体の速度ベクトルをエネルギー保存の法則を用いて求めよ。

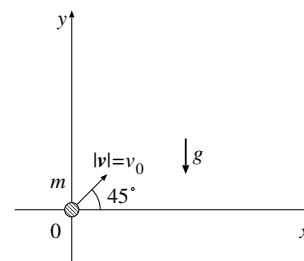


図 9-2

3 図 9-3 に示すように、長さ L 、質量 M の鎖がつるつるした摩擦のない机の上においてある。鎖の端をわずかに机の端から垂らしたところ、鎖はずるずる滑り落ち始めた。この場合について、以下の問に答えよ。ただし、重力は鉛直下向き、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 鎖の垂れ下がる部分の長さが l になった瞬間の、垂れ下がった部分の位置エネルギーを求めよ。(垂れ下がった部分を小さな区間に分け、積分の考え方をいよ。) ただし、位置エネルギーの基準となる点は、机の上面のどこかにあるとする。
- (2) 鎖の垂れ下がる部分の長さが l になった瞬間の鎖の速度の大きさを求めよ。
- (3) (発展問題) 鎖が垂れ下がっている部分に加わる重力が、鎖全体を引っ張っていると考えると、運動方程式をたて、解をもとめよ。これを利用して、前問 (2) を求めよ。ただし、鎖の端をわずかにたらしおいて (l_0) 、 $t = 0$ に手を離れたとせよ。このとき垂らす長さ l_0 は非常にわずかで、動き出してから垂れ下がりの長さ $l(t)$ と比較して無視できるほど小さいとする。 $(l_0 \ll l(t))$

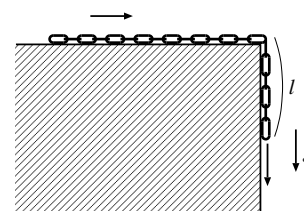


図 9-3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

10. 運動量と力積

1 質量 m_1 、速度 v_1 の粒子が、質量 $m_2 = 3m_1$ で静止している ($v_2 = 0$) 別の粒子に弾性衝突する。衝突後の m_2 の運動は、衝突前の m_1 の方向に比べて、 $\theta_2 = 45^\circ$ である。 m_1 の運動方向 θ_1 および、衝突後の速度 U_1 、 U_2 を求めよ。

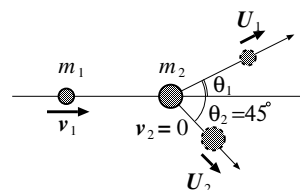


図 10-1

2 図 10-2 (a) に示すようなポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ の 2 次元平面中で質量 m の物体が運動する場合を考える。ポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ は $y < 0$ の領域 (領域 I) では $U(x, y) = 0$ 、 $y > h$ (ただし h は正) の領域 (領域 II) では $U(x, y) = -U_1$ (ただし U_1 は正)、 $0 \leq y \leq h$ の領域 (領域 III) では $U(x, y) = -(U_1/h)y$ で与えられるとする。図 10-2 (b) に示すように、質量 m の物体が、時刻 $t = 0$ において速度 $v_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ で原点 O に飛び込んだとする。このとき以下の問に答えよ。

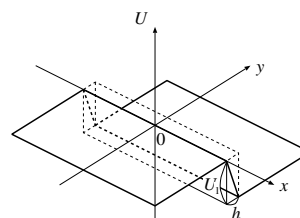


図 10-2 (a)

- (1) 物体がそれぞれの領域にあるとき、物体に加わる力のベクトルをそれぞれ求めよ。
- (2) 領域 III における運動方程式を求め、領域 III に物体が存在している期間の物体の位置 $r(t) = (x(t), y(t))$ および物体の速度 $v(t) = (v_x(t), v_y(t))$ を求めよ。
- (3) (2) の結果を利用して、物体が領域 II に到達する時刻 T およびそのときの物体の速度 $v(T) = (v_x(T), v_y(T))$ 、およびその大きさ $|v(T)|$ を求めよ。
- (4) エネルギー保存の法則を利用して、物体が領域 II に到達する時刻 T における物体の速度の大きさ $|v(T)|$ を求めよ。
- (5) 物体の運動中に物体に加わる力の時間変化をグラフに示せ。また領域 III で与えられる力積を求めよ。両者とも x 成分、 y 成分それぞれについてしめすこと。
- (6) (5) の結果を利用して、物体が領域 II に到達する時刻 T における物体の速度の大きさ $|v(T)|$ を求めよ。
- (7) U_1 の大きさを一定に保ったまま、領域 III の厚み h を無限に薄くした極限 ($h \rightarrow 0$) について、運動方程式を用いる場合、エネルギー保存則を用いる場合、力積を用いる場合のそれぞれについて $|v(T)|$ がどうなるかについて議論せよ。

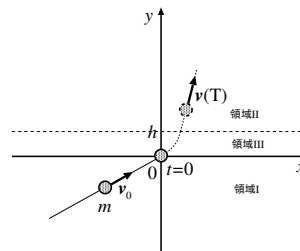


図 10-2 (b)

演習名	担当教官	実施日	自己評点
力学演習		年 月 日	

11. 慣性系、加速度系と座標変換

- 1 図 11-1 に示すように、座標系 A からみて、質点 m が時刻 t において位置 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ にあり、速度 $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ を持つものとする。座標系 A に対し、相対速度 \mathbf{V} で移動している座標系 A' からみた質点 m の位置 $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ および速度 $\mathbf{v}'(t) = (v'_x(t), v'_y(t), v'_z(t))$ を、 \mathbf{r} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{V} (ただし、 \mathbf{R} は座標系 A からみた、座標系 A' の原点の位置ベクトル) を用いて表わしたい。

- (1) ベクトルを用いて表わせ (図および式)
(2) 上の結果を、座標成分を用いて書き表せ。

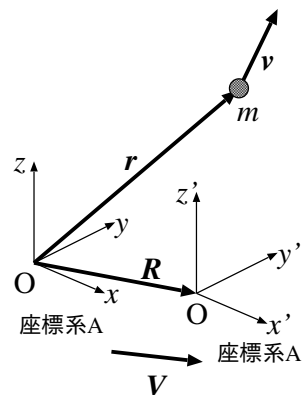


図 11-1

- 2 水平に α の加速度で走る列車の天井に糸を固定して重りをつるす。重りが列車内で静止しているとき、糸は鉛直に対してどれだけ傾くか。慣性系の場合と、列車とともに動く加速度系の場合の両方から論ぜよ。

- 3 図 11-3 のように、長さ L の糸の先端に重り m を付け、糸が鉛直と一定の角度 θ を保つように等速円運動を行わせる。 ω と θ の関係を導け。ただし、慣性系および角速度 ω の回転座標系の両方から論ぜよ。

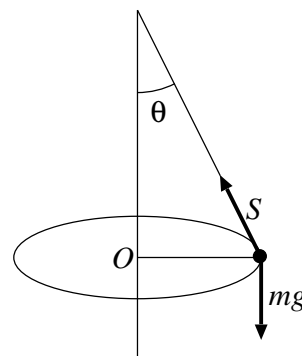


図 11-3