光・波動演習（補充プリント）

1　フーリエ級数

関数 $f(x)$ が周期 $2L$ をもつ周期関数であるとき、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

と展開できると仮定して、係数 a_n, b_n を決める式を導く。(なお、区間が $[-\pi, \pi]$ の場合 (講義配布資料 “http://www.tuat.ac.jp/˜muroo/fourier.pdf” の場合)、以下 $L = \pi$ を代入して考えればよい。逆に区間 $[-\pi, \pi]$ の場合の式から区間 $[-L, L]$ の場合の表式を求め るには、$x' = \pi x/L$ と変数変換すればよい。)

式 (1) の両辺に $\cos(m\pi x/L)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ をかけ x について $-L$ から L まで積分すると、右辺では

$$
\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right\}
$$

であるから、

$$
\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = 0 \tag{2}
$$

$$
\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = L\delta_{m,n} \Rightarrow \begin{cases} L & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{3}
$$

$$
\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = L\delta_{m,n} \Rightarrow \begin{cases} L & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{4}
$$

の関係を用いると $\cos\cdot\cos$ の $m = n$ の部分のみが残り、$a_m L$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ に等しくなる。(記号 $\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタ、線型代数を参照) そこで左辺の $f(x)$ の積分と比較して、最終的に

$$
a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{5}
$$

式 (1) の両辺に、今度は $\sin(m\pi x/L)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ をかけ x について $-L$ から L まで積分すると、同様にして

$$
b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{6}
$$

が得られる。

周期的であればどのような関数でも、三角関数の無限級数によって表すことができるということは非常に有用で、様々な応用が可能となる。

問1: (3) または (4) の関係が成り立つことを、実際に確かめてみよ。

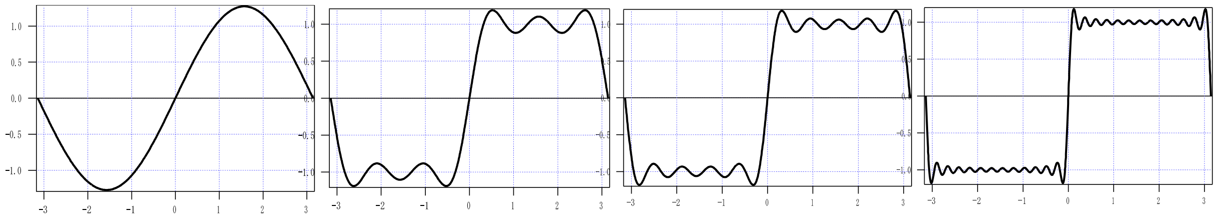
問2: 次のような周期 2π の関数を実際にフーリエ級数展開してみよ。

$$
f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ \ \ 1 & (\ 0 < x < \pi) \end{cases}
$$

参考１: むろん、問２の結果が次のようになることはすでに知られている。

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{11}\sin 11x + \cdots\right\} \tag{7}$$

ここで、上記級数展開の項を順次増やして行ったときの合成波の波形変化を見ておくのも無駄ではあるまい（というより、実際に描かせてみるとちょっと感激的 !?)。



(a) n =1のみ　(b) n =5まで　(c) n =9まで　(d) n =25まで

図 1: フーリエ成分の次数と合成波の波形（(7) 式を表記の次数まで実際に計算）

ここで、元の関数 $f(x)$ に含まれるフーリエ成分の大きさ（展開係数の大きさ）を図示してみると、

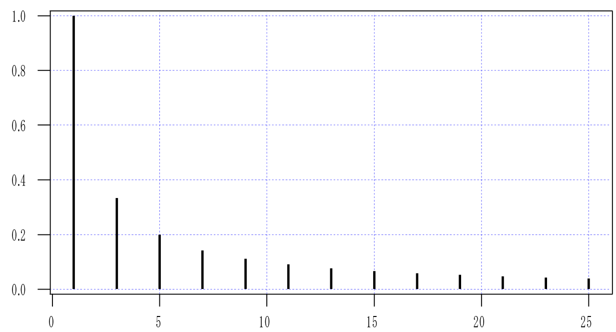


図 2: 矩形波 $f(x)$ に含まれるフーリエ成分の大きさ ($n = 1$ で規格化)

2　フーリエ積分とフーリエ変換

フーリエ級数展開では、関数の周期性が前提であった。ところが関数は必ず周期的であるとは限らない。周期的でない関数ではどのようなことが考えられるのだろうか。周期的でない関数を、周期関数の周期が無限にのびたものであると考えよう。

始めに周期的でない関数と区別するために、有限の周期 $2L$ をもつ関数を $f_L(x)$ と書くことにする。$f_L(x)$ のフーリエ級数展開は、式 (5)(6) を式 (1) に代入することにより求めることができる。このとき、式 (5)(6) で a_n、b_n を求める際の積分変数を、関数 $f_L(x)$ の変数 x と混同しないよう異なる変数 u で表示すると、

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f_L(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\mathrm{d}u + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f_L(u)\sin\frac{n\pi u}{L}\mathrm{d}u\right] \tag{8}$$

ここで後のために

$$w_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{L} \tag{9}$$

と書き直せば、(8) 式は次のようになる。

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta w\left[\cos w_n x\int_{-L}^{L} f_L(u)\cos w_n u\,\mathrm{d}u + \sin w_n x\int_{-L}^{L} f_L(u)\sin w_n u\,\mathrm{d}u\right] \quad (10)$$

ここで $L \to \infty$ の極限において、関数 $f_L(x)$ が収束する極限の関数 $f(x) \equiv \lim_{L\to\infty} F_L(x)$ を考えると、関数 $f(x)$ は周期関数ではなくなる。また、このような関数 $f(x)$ が絶対積分可能、すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ が存在、すると、上記第１項は消え、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta w\left[\cos w_n x\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos w_n u\mathrm{d}u + \sin w_n x\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin w_n u\mathrm{d}u\right] \quad (11)$$

さらに $L \to \infty$ では $w_n = n\pi/L$ は連続変数と見なすことができ、$\Delta w \to 0$ であるから、和を積分に置き換えると (区分求積法による積分計算)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\cos wx\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos wu\mathrm{d}u + \int_0^{\infty}\sin wx\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin wu\mathrm{d}u\right]$$

とすることができる。$\cos\cdot\cos+\sin\cdot\sin$ の部分を変形して

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\, f(u)\cos w(x-u) \quad (12)$$

を得る。これは、むろん次のように書き直してもよい。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,\mathrm{d}w \\ A(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos wu\,\mathrm{d}u \\ B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin wu\,\mathrm{d}u \end{aligned} \quad (13)$$

これを関数 $f(x)$ の**フーリエ積分表示**という（数学的厳密さを求めたければ、適当な本を参照して欲しい)。

以上は実の関数である sin 関数および cos 関数を用いていたが、複素指数関数を用いて考えることもできる。式 (12) において用いられている実の三角関数 $\cos w(x-u)$ は、複素指数関数を用いると、$\cos w(x-u) = \frac{1}{2}\{e^{iw(x-u)} + e^{-iw(x-u)}\}$ と表される。これを式 (12) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u f(u)\frac{1}{2}\{e^{iw(x-u)} + e^{-iw(x-u)}\} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u f(u)e^{iw(x-u)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\, f(u)\, e^{-iw(x-u)} \quad (15)$$

ここで２項目の積分において、$w \to -w'$ と変数変換を行うと、

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u f(u)e^{iw(x-u)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}(-\mathrm{d}w')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\, f(u)\, e^{iw'(x-u)} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}\mathrm{d}u \quad (17)$$

となるから、

$$F(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}\mathrm{d}u \quad (18)$$

と $F(w)$ を定義すれば、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx}\mathrm{d}w \tag{19}$$

と表される。複素指数関数を用いた式 (18)、(19) は $f(x)$、$F(w)$ に対して非常に対称性のよい表式になっている。このように、$f(x)$ が与えられれば、一意的に $F(w)$ が定まり、逆に $F(w)$ が与えられれば $f(x)$ が一意的に定まる。したがって、上記の関係は、２つの関数 $f(x)$ と $F(w)$ の間の一対一対応の関係を表している、すなわち「一対一写像」であると考えることもできる。与えられた関数 $f(x)$ から対応する関数 $F(w)$ を求める操作を**フーリエ変換**、逆に $F(w)$ から元となる関数 $f(x)$ を求める操作を**逆フーリエ変換**と呼ぶ。

注意: 本によっては、次のような、より対称性の高い定義を用いている場合もある。どちらの定義をもちいているか注意が必要である。

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}\mathrm{d}u \quad \text{（フーリエ変換）}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx}\mathrm{d}w \quad \text{（逆フーリエ変換）}$$

問３: 次のような関数（幅 $2a$, 高さ b の矩形パルス）のフーリエ変換を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{b} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

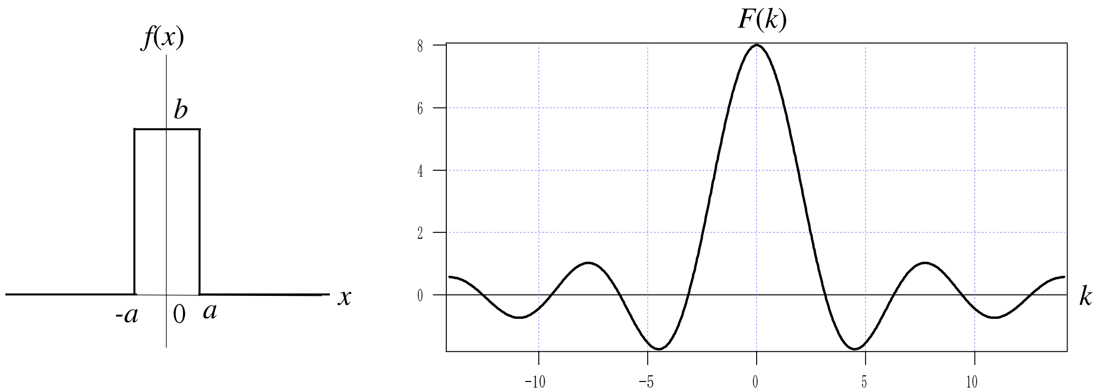


図 3: 単一パルス波のフーリエ変換