フーリエ級数展開

- 区間 $[-\pi, \pi]$ の間で連続な関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{0}, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

  部分積分、三角関数の和の公式等で計算できる。

- 特別な場合 (偶関数と奇関数)
  - 偶関数 $(f(-x) = f(x))$ のとき

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{0}, 1, 2, \cdots)$$

  - 奇関数 $(f(-x) = -f(x))$ のとき

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{1}, 2, \cdots)$$

- 非対称な区間 $[0, \pi]$ におけるフーリエ変換

  $x < 0$ の部分で対称と仮定するか反対称と仮定するかによって余弦級数のみ、または正弦級数のみのいずれかで展開できる。
  - 対称 (偶関数) と仮定 $(f(x) = f(-x)) \Rightarrow$ フーリエ余弦級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{0}, 1, 2, \cdots)$$

  - 反対称 (奇関数) と仮定 $(f(x) = -f(-x)) \Rightarrow$ フーリエ正弦級数展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{1}, 2, \cdots)$$

- 任意の区間 $[a, b]$ の場合、連続な関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2n\pi \frac{x-c}{d}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2n\pi \frac{x-c}{d}\right)$$

$$c \text{ は } a, b \text{ の中点: } c = \frac{a+b}{2}, \quad d \text{ は区間の幅: } d = b - a$$

$$a_n = \frac{2}{d} \int_{a}^{b} f(x) \cos\left(2n\pi \frac{x-c}{d}\right) \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{0}, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{d} \int_{a}^{b} f(x) \sin\left(2n\pi \frac{x-c}{d}\right) \mathrm{d}x \qquad (n = \underline{1}, 2, 3, \cdots)$$