光 · 波動演習

物理システム工学科２年次

2006 年度

(金曜日 · 4 限)

注意

- 本演習は「光 · 波動」の講義と不可分である。講義の充分な理解を期待する。
- 講義と演習は一体として成績を評価する。
- 演習は自分自身で行うことが本質である。板書等他人の計算を写すのではなく自分自身で計算を行うこと。他人との比較は自分の計算の正当性を確認すること、他の考え方がないかを確認すること等のために行うべきである。
- 演習は実習科目であるため出席することが重要視される。断りなく欠席した場合には単位を修得することはできない。
- 遅刻は欠席と同様に避けるべきことである。15 分の遅刻は 1/2 回の欠席、30 分の遅刻は 1 回の欠席としてとりあつかう。

東京農工大学工学部
物理システム工学科

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

1. 正弦関数、指数関数の復習

$\boxed{1}$ 次の関数を [ ] の中の変数によって微分せよ。

（1）$\sin x$ $[x]$, $\cos(-2x)$ $[x]$, $\tan x/3$ $[x]$

（2）$\sin(\omega t)$ $[t]$, $\cos(\omega t)$ $[\omega]$, $\cos(kx)$ $[x]$, $\sin(kx)$ $[k]$

（3）$A\sin(\omega t+\theta)$ $[\omega]$, $E_0\cos(\omega t+\phi)$ $[\phi]$

（4）$Z_0\sin(\omega t+kx+\theta)$ $[Z_0,\omega,t,k,x,\theta]$

$\boxed{2}$ 次の関数について [ ] の中の変数に関する不定積分を求めよ。([ ] 以外のものは定数とみなせ。)

（1）$\sin x$ $[x]$, $\cos(-2x)$ $[x]$

（2）$\sin(\omega t)$ $[t]$, $\cos(\omega t)$ $[\omega]$, $\cos(kx)$ $[x]$, $\sin(kx)$ $[k]$

（3）$A\sin(\omega t+\theta)$ $[\omega]$, $E_0\cos(\omega t+\phi)$ $[\phi]$

（4）$Z_0\sin(\omega t+kx+\theta)$ $[Z_0,\omega,t,k,x,\theta]$

$\boxed{3}$ 次の指数関数について [ ] 内の変数に関する導関数および原始関数を求めよ。([ ] 以外のものは定数とみなせ。)

（1）e^x $[x]$, $\exp(-2t)$ $[t]$, e^{kx} $[x]$, $\exp(kz)$ $[k]$, $\exp(\nu t)$ $[t]$, $\exp(-\nu t)$ $[\nu]$, $\exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ $[t]$, $\exp(\alpha+\beta)$ $[\beta]$

（2）e^{ix} $[x]$, $\exp(-2it)$ $[t]$, e^{ikx} $[x]$, $\exp(ikz)$ $[k]$, $\exp(i\omega t)$ $[t]$, $\exp(-i\omega t)$ $[\omega]$, $\exp(\alpha+i\beta)$ $[\beta]$

$\boxed{4}$ 三角関数について各問に答えよ。

（1）次の三角関数を指数関数で書き表せ。

$\sin\alpha=?$　　$\cos\beta=?$　　$\sin(i\alpha)=?$　　$\cos(i\omega t)=?$

（2）次の三角関数を三角関数に展開せよ。

$\sin(\alpha+\beta)=?$　　$\cos(\alpha-\beta)=?$　　$\cos 2\tau=?$　　$\sin 3\xi=?$

（3）次の三角関数の積を三角関数の和の形になおせ。

$\sin^2 x=?$　　$\cos^2 t=?$　　$\sin x\cos y=?$

$\boxed{5}$ 指数関数について各問に答えよ。

（1）次の指数関数を複素平面上にプロットせよ。

$3\exp\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$　　$-2\exp\left(-\dfrac{\pi}{2}i\right)$　　$\exp(\pi i)$　　$\exp\left(\dfrac{n\pi}{3}i\right)$（$n$ は整数)　　$R\exp(i\theta)$

（2）次の指数関数を三角関数で書き表せ。

$\exp(i\theta)=?$　　$\exp(-i\omega t)=?$　　$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=?$　　$2(e^{ikz}-e^{-ikz})=?$

（3）次の関数をグラフに書き表せ。

$\mathrm{Re}(\exp 2xi)$　　$\mathrm{Im}\left\{\exp\left(-\dfrac{t}{3}i\right)\right\}$　　$\mathrm{Re}\left[\exp\{(i\pi-1)z\}\right]$

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

2. 単振動の微分方程式

$\boxed{1}$ 図 1 に示すように、自然長 l_0、バネ定数 k のバネに質量 m の重りがつながれている。重りと床との摩擦はないものとして各問に答えよ。

（1）重りの運動方程式を記せ。

（2）運動方程式を解いて運動の一般解を求めよ。

（3）重りを引っ張って、$x = l_0 + \Delta l$ の位置まで移動させた後、$t = 0$ の瞬間に手を離した。その後の重りの運動を求めよ。

$\boxed{2}$ 図 2 に示すように天井から長さ L の糸で質量 m の重りが吊されている。重力加速度を g として各問に答えよ。ただし糸の質量は無視できるものとする。

（1）図 2 に示すように重りを鉛直方向からの角度が θ (rad) になるまで引き上げた。このときの重りの x 座標、y 座標を求めよ。

（2）上の場合の重りの位置エネルギー U を θ の関数として求めよ ($U(\theta)$)。ただし、真下の位置 ($\theta = 0$) での重りの位置エネルギーを 0 とする。

（3）$U(\theta)$ を θ についてテーラー展開し、θ^2 の項 (θ の 2 次のべき) まで求めよ。また、$x = L\theta$ と近似するとき、θ を消去して U を x の 2 次式で表せ。

（4）重りに対する復元力の x 軸方向成分 F を、x の関数として求めよ。

（5）重りの x 軸方向の運動方程式を立て、その一般解を求めよ。

$\boxed{3}$ (発展問題) 問題 $\boxed{1}$ において、重りに対して速度に比例する制動力 $-\gamma\dot{x}$ が働くとする。

（1）重りの運動方程式を記せ。

（2）運動方程式を解いて運動の一般解を求めよ。ただし、$\gamma < 2\sqrt{mk}$ とする。(余裕がある者は $\gamma = 2\sqrt{mk}$ の場合、$\gamma > 2\sqrt{mk}$ の場合についても解を求めよ。)

（3）重りを引っ張って、$x = l_0 + \Delta l$ の位置まで移動させた後、$t = 0$ の瞬間に手を離した。その後の重りの運動を求めよ。

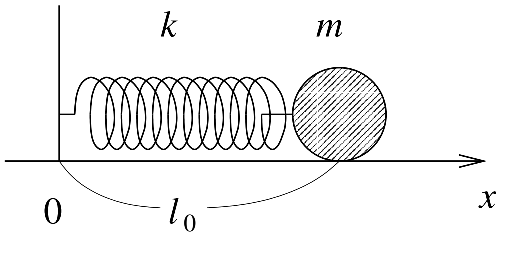


図 1

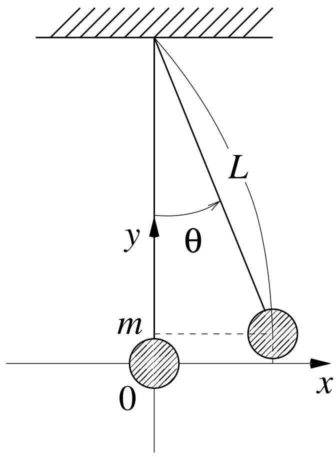


図 2

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

3. 多体系の振動 (2 体系)

1 図 1 に示すように、2 個の質量 m の重り A, B をバネ定数 K のバネでつなぎ、それぞれをバネ定数 k のバネで壁に繋いだ。

（1）2 つの重り A, B の運動方程式を求めよ。

（2）運動方程式をとき、振動数の小さい順に基準モードを求めよ。

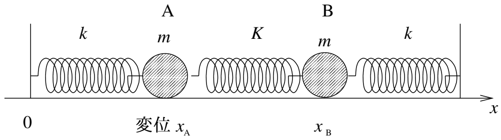


図 1

2 図 2 に示すように 2 つの振り子 A, B の間に弱いバネ (バネ定数 k) がつながっている。2 つの振り子は両方ともおもりの質量が m、ひもの長さが l であるとする。また、重力加速度を g とする。

（1）2 つの重りの運動方程式を示せ。ただし振り子のゆれの振幅は十分小さいものとする

（2）運動方程式をとき、振動数の小さい順に基準モードを求めよ。

（3）振り子 A を右方向 (x の正の方向) に d だけずらし、一方 B は真下からずれないように押さえておいてから、時刻 $t = 0$ において手を離した。以後の振り子 A, B の運動を求めよ。

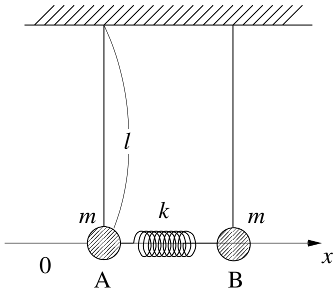


図 2

3 (発展問題) 図 3 のように質量 m の 2 個の重り A, B をバネ定数 K のバネで連結した。(壁にはつながない。)

（1）重り A, B の運動方程式を行列を用いて示せ。

（2）運動方程式に現れる行列の固有値を求め、行列を対角化せよ。

（3）重り A, B の運動を求めよ。この系は、問 $\boxed{1}$ における、$k \to 0$ の極限になっている。問 $\boxed{1}$ の解について $k \to 0$ の極限を考えることにより、絶対値の一番小さな固有値に対する固有モードがどういう運動に対応しているかを考えよ。

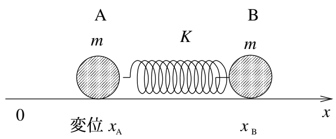


図 3

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

4. 多体系の振動 (3 体系-N 体系)

1 (3 体の振動子) 図 1 のように質量 m の 3 個の物体が質量の無視できる軽い糸によって結ばれ、また両端の物体は糸により壁に固定されている。全ての糸の長さを L、糸の張力を T とするとき、各物体の連結振動について以下の問に答えよ。なお、振動の方向は物体の並ぶ方向とは垂直方向とし (横波)、その中で、ある 1 方向の運動だけを考える (横波の運動の自由度のうち、ある一つの方向の運動だけを考える)。

(1) 1, 2, 3 番目の物体を、平衡位置からそれぞれ x_1, x_2, x_3 だけずらしたとき (変位)、2 番目の物体に加わる力の大きさと方向を求めよ。ただし、変位の絶対値は L と比較して非常に小さいものとする。

(2) 3 つの物体の運動方程式を、講義でやったのと同様な方法で行列を用いて書き表せ。

(3) 上記の運動方程式にでてくる行列の固有値、固有ベクトルを求め、その結果を用いて、行列を対角化するユニタリ変換を表す行列 P を求めよ。ただし、固有値は絶対値の小さい順番に並べるものとする。

(4) 上記のユニタリ変換の逆変換 P^{-1} によって、x_1, x_2, x_3 を変換した座標を X_1, X_2, X_3 とするとき、X_1, X_2, X_3 の満たす微分方程式を求めよ。

(5) 上記 X_1, X_2, X_3 の微分方程式をとき、基準モード (基準振動) を求めよ。また、求めた X_1, X_2, X_3 に対してユニタリ行列 P を適用することにより、x_1, x_2, x_3 を求めよ。

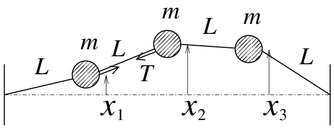


図 1

2 (N 体の振動子) 図 2 のように質量 m の N 個の物体が質量の無視できる軽い糸によって結ばれ、また両端の物体は糸により壁に固定されている。それぞれの糸の長さを L、糸の張力を T とするとき、各物体の連結振動について以下の問に答えよ。

(1) $1, 2, 3 \cdots N$ 番目の物体を、平衡位置からそれぞれ $x_1, x_2, x_3 \cdots x_N$ だけずらしたとき (変位)、i 番目の物体に加わる力の大きさと方向を求めよ。ただし、変位の絶対値は L と比較して非常に小さいものとする。

(2) i 番目の物体について、講義でやったのと同様な方法で漸化式を用いて運動方程式を書き表せ。

(3) i 番目の物体が、$x_i(t) = C_i \sin(\omega t + \phi)$ で振動すると仮定したとき、これを運動方程式に代入することにより、C_i の満たすべき条件を C_i の漸化式を用いて書き表せ。

(4) C_i を $C_i = \sin\left(\frac{n\pi}{N+1} i\right)$ (n は $1, 2, \cdots N$) と仮定して、これを上記 C_i の漸化式に代入することにより、ω の満たすべき条件を求めよ。

(5) $N = 4$ の場合について、基準振動の小さい順に (モードの次数の低次のものから) 振動パターンの概略を示せ。

(6) $N = 5$ の場合について、基準振動の小さい順に (モードの次数の低次のものから) 振動パターンの概略を示せ。

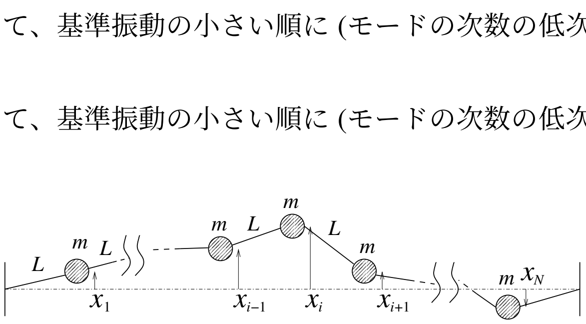


図 2

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

5. 連続体の振動 (1 次元系)

$\boxed{1}$ 細長い連続体の縦波の運動方程式を、N 体連成振動子における $N \to \infty$ の極限を考えることにより求める。連続体を N の区間 (区間の長さ l) に分け、その一区間を図 1 に示すようにバネ定数 k のバネでつながれた質量 m の質点と見なす。変位 x が連続体の延び z 方向に向いている場合 (縦波)、以下の問に答えよ。

(1) $1, 2, 3 \cdots N$ 番目の物体を、平衡位置からそれぞれ $x_1, x_2, x_3 \cdots x_N$ だけずらしたとき (変位)、i 番目の物体に加わる力を求めよ。(バネ定数 k, 質量 m を用いよ。)

(2) i 番目の物体について、講義でやったのと同様な方法で漸化式を用いて運動方程式を書き表せ。(バネ定数 k, 質量 m を用いよ。)

(3) 連続体の単位長さあたり質量を ρ、ヤング率を Y とするとき、上記のバネ定数 k および質点の質量 m と ρ, Y との関係を求めよ。ここで、ヤング率とは物体に応力 T を加えた時の歪み γ との比を表す定数であり、$Y \equiv T/\gamma$ で与えられる。また、応力とは連続体に加えられた断面積 S あたりの力 F であり ($T \equiv F/S$)、歪みとは、伸びた長さ Δl と元々の長さ l との比である ($\gamma \equiv \Delta l/l$)。

(4) 小問 (2) で求めた運動方程式から、(3) で求めた関係を利用して質量 m およびバネ定数 k を消去せよ。

(5) 講義でやったのと同様な方法で、区間を無限に細かくしていったときの極限を考え ($N \to \infty$ すなわち $l \to 0$)、連続体の縦波の運動方程式を求めよ。

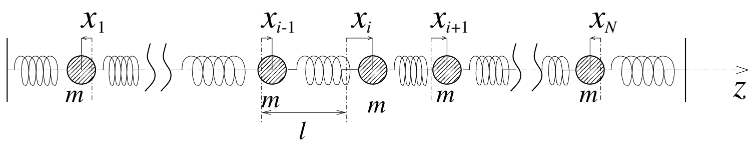


図 1

$\boxed{2}$ 解の形式を仮定して、弦の運動方程式を解いてみる。弦の振動 (横波) の運動方程式を

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t, z) = T \frac{\partial^2}{\partial z^2} x(t, z)$$

とする。ただし、T は弦の張力 ($\boxed{1}$ と違うので注意!)、ρ は弦の単位長さあたり質量である。また、弦の長さは L、弦の両端は固定されているものとする。弦の各部分が同じ振動数、同じ位相で振動すると考えて、解を $x(t, z) = f(z) \sin(\omega t + \phi)$ となると仮定して、以下の問に答えよ。

(1) 仮定した解を運動方程式に代入し、$f(z)$ の満たすべき条件 ($f(z)$ の微分方程式) を求めよ。

(2) 弦の両端に関する境界条件を考慮にいれて $f(z)$ の一般解を求めよ。

(3) 上問において、ω が満たすべき条件を求めよ。(ω が条件を満たすような解を基準振動 (基準モード) という。)

(4) $x(z, t)$ の一般解は基準モードの重ね合わせである。$x(z, t)$ の一般解を求めよ。

(5) 上問の条件を満たす ω を小さい順に並べたとき、ω のもっとも小さいモード (最低次のモード)、2 番目のモード、3 番目のモードについて振動パターンの概略を示せ。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

6. 1次元の波動 (定在波と進行波)

1 フーリエ級数展開を利用して、両端を固定された弦の運動方程式を解いてみる (定在波)。弦の振動の運動方程式を

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,z) = T \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(t,z)$$

とする。ただし、T は弦の張力、ρ は弦の単位長さあたり質量である。また、弦の長さは L、弦の両端は固定されているものとする。

（1）$u(t,z)$ が境界条件 $u(t,0) = u(t,L) = 0$ を満たす場合のフーリエ級数展開を考える。($u(t,0) = 0$ から奇関数の非対称区間におけるフーリエ変換を利用すればよい。) 配布資料の 3 番目の奇関数のケースについて、$x \equiv (\pi/L)z$ と変数変換することにより、

$$u(t,z) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(t) \sin\left(\frac{j\pi}{L} z\right)$$

と書き表されることを示せ。また、$U_j(t)$ を $u(t,z)$ を用いて書き表せ。

（2）上式を弦の運動方程式に代入し、両辺のフーリエ級数の各項を比較することにより j 番目の基準モード $U_j(t)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。

（3）上記の $U_j(t)$ の微分方程式を解いて、j 番目の基準モード $U_j(t)$ の一般解を求めよ。

（4）各基準モードを重ね合わせることにより、$u(t,z)$ の一般解を求めよ。

2 定在波を 2 つに分割して考えることにより進行波の数学的形式を考えてみる。両端を固定された長さ L の弦の定在波のなかで j 番目の基準モードのみが励起されている場合、$x(t,z) = X_{j0} \cos(\omega_j t + \phi_j) \sin(\frac{j\pi}{L} z)$ となることを利用して各問に答えよ。

（1）ω_j を T および ρ を用いて書き表せ。ただし T、ρ は前問と同じ定義とする。

（2）$\cos A \sin B = \{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}/2$ となることを利用して、$x(t,z)$ を 2 つの正弦関数の和で書き表せ。

（3）上記で求めた 2 つの正弦関数について、$t = 0$ の時刻の概形および $t = \Delta t$ の時刻の概形を描き、それぞれが時間の経過とともにどのように移動するかを調べよ。ただし、ϕ_j は $0 < \phi_j < \pi/2$ の範囲にあるとする。

（4）上記の 2 つの正弦関数の移動する速度 (位相速度) の大きさおよび向きを求めよ。

（5）求めた進行波の波長 λ_j、振動数 ν_j、波数 k_j、周期 τ_j を ρ、T、j、L を用いて書き表せ。また波数と角振動数、波の速度 (位相速度) との間の関係を求めよ。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

7-A. フーリエ変換による弦の振動とダランベールの解

$\boxed{1}$ 境界のない弦をつたわる波動をフーリエ変換をもちいてついて考える。弦の横波の運動方程式 (波動方程式) を

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t,z) = T \frac{\partial^2}{\partial z^2} x(t,z)$$

とする。

（1）$x(t,z)$ を z に関して以下のようにフーリエ変換したとき、

$$x(t,z) = \int_0^\infty a(k;t) \cos kz \, \mathrm{d}k + \int_0^\infty b(k;t) \sin kz \, \mathrm{d}k$$

$x(t,z)$ を波動方程式に代入し、$a(k;t)$、$b(k;t)$ が満たすべき微分方程式を書き記せ。

（2）上記の微分方程式をといて、$a(k;t)$、$b(k;t)$ の一般解を求めよ。

（3）上記で求めた $a(k;t)$、$b(k;t)$ を $x(t,z)$ のフーリエ変換の表式に代入し、$x(t,z)$ の一般解を求めよ。

$\boxed{2}$ 弦を伝わる波動にたいするダランベール (d'Alembert) の解について考える。弦の運動方程式としては、問 $\boxed{1}$ と同じ波動方程式を考える。

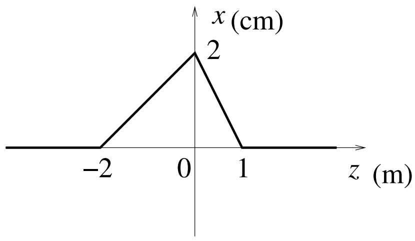
（1）ダランベールの解、

$$x(t,z) = \frac{1}{2} F(z+vt) + \frac{1}{2} F(z-vt)$$

を運動方程式に代入し、等号の両辺を比較して等式が成立する場合が存在することを確かめよ。また、等式が成立するための v に対する条件を求めよ。ただし F は任意の連続関数とする。

（2）1 m あたり 10 g の質量の紐を張力 1 N (およそ 1/9.8=0.102 kgw) の大きさで引っ張った。このとき紐を伝わる横波の速度を求めよ。

（3）上記の紐を引っ張って下図に示す形にした後、$t = 0$ の瞬間に手を離した。0.05 秒後、0.1 秒後、0.15 秒後、0.2 秒後の各瞬間における弦の形状をそれぞれ描け。



7-B. ベクトル解析の復習

$\boxed{3}$ 3 次元のベクトル量を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$、スカラー量を α とするとき、次の各問に答えよ。

（1）次の各式を求めよ。(スカラーかベクトルかをわかるように書け。)

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$、　$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$、　$\mathrm{grad}\,\alpha$、　$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$、　$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$

（2）次の等式が成り立つことを示せ。

$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$、　$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

8. 2 次元および 3 次元の波動方程式

1 図に示すように、2 次元の連続体 (膜) を碁盤の目に分けて、その一つ一つを質点と考えることにより膜の運動を考える。分けたマス目の順番を x 軸方向については整数 i で、y 軸方向については整数 j で指定することにする。(原点のマス目を、$(i, j) = (0, 0)$ とする。) また、(i, j) のマス目の変位を $u(i, j)$ と書くことにする。

(1) 碁盤の目の一辺の長さを l としたとき、一つのマスの質量を求めよ。ただし、膜の単位面積あたり質量を ρ とする。

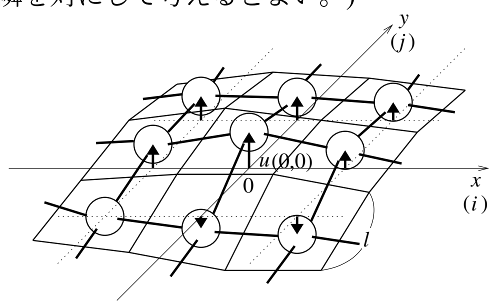
(2) $(0, 0)$ 番目のマス目が $(1, 0)$ 番目のマス目から引っ張られる力の x 軸方向および変位の方向成分の大きさを、$u(0, 0)$ および $u(1, 0)$ を用いて表せ。ただし、単位長さあたり張力を T とする。(張力は隣のマス目と接する部分の長さに比例して大きくなるので、比例定数として単位長さあたりの力を考える。)

(3) $(0, 0)$ 番目のマス目が 4 方向から引っ張られる力の合力を求めよ。

(4) $(0, 0)$ 番目のマス目の運動方程式を求めよ。

(5) (i, j) 番目のマス目の運動方程式を求めよ。

(6) $l \to 0$ の極限を考えることにより、2 次元の連続体の運動方程式 (波動方程式) を求めよ。(このとき、x 軸の両隣、y 軸の両隣を対にして考えるとよい。)



2 3 次元の連続体の運動方程式 (波動方程式) を

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \boldsymbol{r}) = T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(t, \boldsymbol{r})$$

とする。ここで、連続体の単位体積あたり質量を ρ、単位面積あたり張力 (応力という。) を T とする。(問 $\boxed{1}$ と定義が異なるので注意!)

(1) 解の形を $u(t, \boldsymbol{r}) = A \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = A \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)$ と仮定して波動方程式に代入し、波動方程式を満たすことを確かめよ。また、波動方程式を満たすための ω に対する条件を示せ。ここで、$\boldsymbol{k}$ を波数ベクトルという。

(2) 波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (1, 1, 0)$ にたいする波動について考える。時刻 $t = 0$ における同一位相面 (位相 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$ が一定になる面) はどのような面になるかを求めて、面の式を表せ。また、位相が 0 なる面および 2π となる面 (ともに変位が最大となる面) を具体的に図示せよ。

(3) 時間が少し経過して、$t = t_1$ となったとき、位相 0 の面および 2π の面を図示せよ。ただし、t_1 は $0 < t_1 < \pi/(2\omega)$ の範囲にあるものとする。

(4) 以上より、波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (1, 1, 0)$ にたいする波動の進行する方向、進行する速度を求めよ。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

9. マックスウエル方程式と電磁波

1 真空中のマックスウエル方程式を

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 & (1) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (2) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 & (3) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

とする。ここで、μ_0 は真空の透磁率、ε_0 は真空の誘電率である。この真空中のマックスウエル方程式について、以下の問に答えよ。

（1）式 (2) の両辺の回転 (rot: rotation) を計算し、式 (4) を代入することにより、$\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\boldsymbol{E}$ となることを示せ。また、式 (2) と式 (4) の役割を入れ替えることにより、$\boldsymbol{B}$ が満たす方程式を求めよ。

（2）$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ と仮定して問 (1) で求めた式に代入し、この式を満たすことを確かめよ。このとき ω と $\boldsymbol{k}$ との間で満たすべき条件を示せ。また、$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ についても同様に確かめよ。

（3）上で仮定した $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ を、式 (2) に代入して時間微分、空間微分を計算せよ。同様に式 (4) に代入し時間微分、空間微分を計算せよ。この両式から、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{k}$ の 3 つのベクトルの方向の関係を求め図示せよ。

（4）上問 (3) において、$\boldsymbol{E}_0$ の大きさ E_0 ($\equiv |\boldsymbol{E}_0|$) と、$\boldsymbol{B}_0$ の大きさ B_0 ($\equiv |\boldsymbol{B}_0|$) との間の関係を求めよ。

2 問 1 のマックスウエル方程式の解 ($\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$) について具体的に考える。ベクトル $\boldsymbol{k} = (2,0,0)$ [rad/m]、$\boldsymbol{E}_0 = (0,0,1)$ [V/m] であるとき、以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率は $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$、真空の透磁率 $\mu_0 = 1.26\times10^{-6}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}^{-2}$ である。

（1）$\boldsymbol{k}$ および ε_0、μ_0 から電磁波の角振動数 ω [rad/s] を求めよ。ただし有効数字を 2 桁とする。

（2）$\boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{E}_0$ から磁束密度の振幅のベクトル $\boldsymbol{B}_0$ を求めよ。ただし、磁束密度の単位としては $\mathrm{Wb/m^2}$(ウエーバー毎平方メートル、SI 単位系) を用いよ。

（3）時刻 $t = 0$ における電場の同一位相面 (位相 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ が一定になる面) はどのような面になるかを求めて、面の式を表せ。また、位相が 0 なる面および 2π となる面 (ともに電場が同じ向きで最大となる面) を具体的に図示せよ。

（4）時間が少し経過して $t = 1\times10^{-9}$ s たったとき、位相 0 の面および 2π の面を図示せよ。

（5）電磁波の進む方向、速度、電磁波の波長を求めよ。

演習名	担当教官	実施日	自己評点
光・波動演習		年　月　日	

10. 波動のエネルギーと電磁波のエネルギー

$\boxed{1}$ 質量 m の質点にバネ定数 k のバネをつないでつくった調和振動子について以下の問に答えよ。ただし質点の変位を $x(t)$ とする。

（1）調和振動子の運動方程式をもとめ、それを解いて変位の一般解 $x(t)$ およびその解に対する速度 $v(t) \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を求めよ。

（2）時刻 t における質点の運動エネルギー $K(t)$ およびポテンシャルエネルギー $U(t)$ を求めよ。また、全エネルギー $E(t) = K(t) + U(t)$ を求めよ。

（3）運動エネルギー $K(t)$ およびポテンシャルエネルギー $U(t)$ の周期平均 $\overline{K}$ および $\overline{U}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 張力 T で引っ張った線密度 ρ の弦を伝わる進行波について以下の問に答えよ。

（1）進行波を $x(t,z) = A\sin(kz - \omega t)$ とするとき、$z \sim z + \mathrm{d}z$ の間の運動エネルギー $\mathrm{d}K(t,z)$、ポテンシャルエネルギー $\mathrm{d}U(t,z)$、全エネルギー $\mathrm{d}E(t,z) = \mathrm{d}K(t,z) + \mathrm{d}U(t,z)$ を求めよ。

（2）$z = 0$ において、運動エネルギー $\mathrm{d}K(t,0)$、ポテンシャルエネルギー $\mathrm{d}U(t,0)$、全エネルギー $\mathrm{d}E(t,0)$ を求めよ。この結果を調和振動子の場合と比較し、共通する点、異なる点を議論せよ。

（3）$z = 0$ において、運動エネルギーの周期平均 $\overline{\mathrm{d}K}$、ポテンシャルエネルギーの周期平均 $\overline{\mathrm{d}U}$、全エネルギーの周期平均 $\overline{\mathrm{d}E}$ を求めよ。

（4）時刻 $t = 0$ において、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、全エネルギーのそれぞれの空間分布 $\mathrm{d}K(0,z)$、$\mathrm{d}U(0,z)$、$\mathrm{d}E(0,z)$ を求め、外形をグラフに描け。

（5）時 $t = 0$ において、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、全エネルギーのそれぞれについて波長平均を求めよ。

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ で与えられる真空中を伝わる電磁波について以下の問に答えよ。

（1）$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ に対して磁場 $\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})$ を求めよ。また電場と磁場の振幅の大きさの関係を求めよ。

（2）電場および磁場として蓄えられるエネルギー密度（単位体積あたりエネルギー）はそれぞれ、$U_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$、$U_B = \dfrac{1}{2\mu_0}B^2$ で与えられる（電磁気学 AB）。上で求めた結果を用いて、電場によるエネルギー密度 $U_E(t,\boldsymbol{r})$、磁場によるエネルギー密度 $U_B(t,\boldsymbol{r})$ および電磁波の全エネルギー密度 $U_{\mathrm{EM}}(t,\boldsymbol{r}) = U_E(t,\boldsymbol{r}) + U_B(t,\boldsymbol{r})$ を求めよ。

（3）上の電磁波は、光速 c で波数ベクトル k の方向に伝播している。進行方向に対して垂直な面内の単位面積を単位時間に通過するエネルギーの大きさを求めよ。

（4）電磁波の電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$、磁場 $\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})$ に対して、ポインティングベクトルというベクトル量 $\boldsymbol{S}$ が $\boldsymbol{S} \equiv \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})$ と定義されている。上で求めた結果をもちいて $\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r})$ を計算せよ。

（5）$\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r})$ の大きさとその向きをしらべ、(3) の結果と比較せよ。