

Special Function Solutions of $A_0^{(1)}$ -surface Painlevé Equations

Mikio Murata

概要

$A_0^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式とは、パンルヴェ方程式の有理曲面の理論による分類において系列の最上位に属する $E_8^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を有する $A_0^{(1)}$ 型曲面上の方程式として得られる差分方程式である。

この方程式の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標に対する具体的な表式を導出し、それらの方程式に対して線型方程式の解により定まるリッカチ型の特殊解を求めた。

そして、この線型方程式は退化操作により既存の超幾何方程式を導出できることから、その意味で、この線型方程式を超幾何方程式と呼称するが、これら超幾何方程式の一連の退化図式を完成させた。

1 Introduction

パンルヴェ方程式は、70, 80 年代に岡本和夫氏によって、初期値空間と呼ばれる有理曲面が構成され、またアフィンワイル群対称性が発見されたことにより、幾何の側面での大きな進展があった。

坂井秀隆氏はその初期値空間の構成とは逆に、初期値空間からパンルヴェ方程式を導出した。これは、有理曲面に対して代数幾何の理論から対称性を導出し、その対称性の平行移動部分を差分系としてとらえ、更にその極限として微分方程式を導出するものである。結果として、アフィンワイル群対称性の来歴も明らかになった。

その差分系自身は離散パンルヴェ方程式と呼ばれる。90 年代に極限操作でパンルヴェ方程式に移行し、特異点閉じ込め性というパンルヴェ性の離散版と見なし得る性質を持つ差分方程式として研究され始めたものである。

坂井 [14] によって一連の離散パンルヴェ方程式が対象とする有理曲面の型によって分類され、また、この分類により幾つかの新たな離散パンルヴェ方程式が発見された。

具体的には, $|-K_X|$ の元で標準型と呼ばれる因子を有する非特異有理曲面を一般化ハルフェン曲面と定義すると, その一般化ハルフェン曲面で, $|-K_X|$ の次元が 0 のときの $D = \sum m_i D_i \in |-K_X|$ の型 R で表 1 のように分類される.

表 1: $\dim |-K_X| = 0$ の一般化ハルフェン曲面の分類

type	R
Elliptic type	$A_0^{(1)}$
Multiplicative type	$A_0^{(1)*}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, A_4^{(1)}, A_5^{(1)}, A_6^{(1)}, A_7^{(1)}, A_7^{(1)'}, A_8^{(1)}$
Additive type	$A_0^{(1)**}, A_1^{(1)*}, A_2^{(1)*},$ $D_4^{(1)}, D_5^{(1)}, D_6^{(1)}, D_7^{(1)}, D_8^{(1)},$ $E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$

ここで, elliptic type, multiplicative type, additive type という区別は $\text{rank } H_1(D_{red}, \mathbb{Z}) = 2, 1, 0, (D_{red} = \cup D_i)$ という値にそれぞれ対応している. この区別は離散パンルヴェ方程式においてはそれぞれ楕円差分, q 差分 (通常) 差分という差分形式の違いに対応している.

また, R は $E_8^{(1)}$ 型のルート系の既約アフィン部分ルート系に対応している. $A_0^{(1)}$ というのは D 自身が既約であるときにルート格子が $Q(R) = \mathbb{Z}K_X$ となる場合の R を他の指標との統一性から $R = A_0^{(1)}$ と呼んでいるものであるが, この $A_0^{(1)}$ 型曲面というのは一連の分類の中で最も一般の場合に相当する. この $A_0^{(1)}$ 型曲面のように複数の type をもつものについては, 表のように $A_0^{(1)}, A_0^{(1)*}, A_0^{(1)**}$ などとして区別する.

この表の中で, $D_i^{(1)}, E_i^{(1)}$ 型曲面がパンルヴェ微分方程式の初期値空間になり, 対応は次のようになっている.

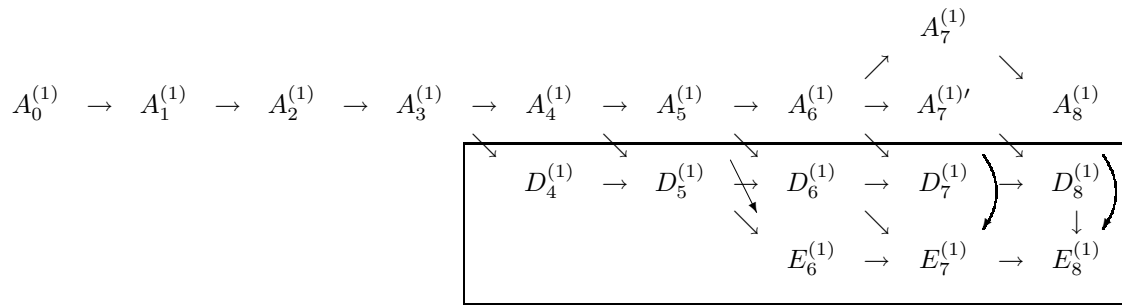
the type of surface	$D_4^{(1)}$	$D_5^{(1)}$	$D_6^{(1)}$	$D_7^{(1)}$	$D_8^{(1)}$	$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$
Painlevé equation	P_{VI}	P_V	$P_{III}^{D_6^{(1)}}$	$P_{III}^{D_7^{(1)}}$	$P_{III}^{D_8^{(1)}}$	P_{IV}	P_{II}	P_I

またこのとき, ルート格子 $Q(R)$ の包含関係を "→" で表わすとすると ($R \rightarrow R' \Leftrightarrow Q(R) \subset Q(R')$), その図式は表 2 のようになる.

各離散パンルヴェ方程式について, 従前は, 差分の種類 (差分か q -差分) と極限操作で得られる微分方程式から例えば q - P_{IV} , d - P_I 等と命名されていたが, 分類を見るとこの命名法ではすべてを区別できないことが分かる.

そのため, この論文では, 各離散パンルヴェ方程式を導出の際に対象とした有理曲面の型を冠して, $A_0^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式 ($A_0^{(1)}$ -surface P) 等と呼ぶことにする.

表 2:



さて、パンルヴェ方程式にはパラメータが特別な場合に超幾何方程式等の線型方程式の解で記述できる特殊解があることが知られている．その構造は離散パンルヴェ方程式でも同様であり、パラメータが特別な場合に線型方程式の解で記述できる特殊解が存在する．その意味でその線型方程式を差分超幾何方程式と呼称するが、 $A_0^{(1)}$ 型曲面の離散パンルヴェ方程式に対する差分超幾何方程式は米田、坂井との共同研究 [15] で導出した．

本論文の目的は、一連の差分超幾何方程式の中で未知である方程式を導出し、他の差分超幾何方程式との関係を示すことにある．

この論文の構成は次の通りである．

第 2 節では、 $A_0^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標に対する具体的な表式を定理 1 として示し、その方程式の特殊解として得られる差分超幾何方程式を定理 2 として示す．米田、坂井との共同研究の結果も併せて記載する．

第 3 節では、 $A_0^{(1)*}$ 型曲面パンルヴェ方程式の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標に対する表式を我々の方法で導出した上で、その方程式の特殊解として得られる差分超幾何方程式を導出する．また、それらの方程式と $A_0^{(1)}$ 型曲面から得られた方程式との極限操作による対応を定理 3, 4 として示す．

第 4 節では、第 3 節と同様に、 $A_0^{(1)**}$ 型曲面パンルヴェ方程式の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標に対する表式を我々の方法で導出した上で、その方程式の特殊解として得られる差分超幾何方程式を導出する．また、その差分超幾何方程式と $A_0^{(1)*}$ 型曲面から得られた差分超幾何方程式との極限操作による対応を定理 6 として示す．

第 5 節では、第 3 節で得られた差分超幾何方程式が離散パンルヴェ方程式と同様の極限操作で $A_1^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式の特殊解として得られる差分超幾何方程式に移行することを定理 7 として示す．

$A_1^{(1)}$ 型曲面以降の差分超幾何方程式の退化に関しては Ramani et al.[2] の結果があるので、その論文で示し得なかった部分について補完したことになる．

2 Elliptic type

2.1 Painlevé equation

定理 1. $A_0^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式は, t を独立変数, b_i ($i = 1, \dots, 8$) をパラメータ, $f = f(t), g = g(t)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非斉次座標として, 次で与えられる.

$$\begin{aligned}
 \bar{g} = & \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 c_i - c_7 + c_8}{2}) & \wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 c_i + c_7 - c_8}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \wp(c_8) & 0 \\ 0 & f - \wp(c_7) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 c_i + 2c_7}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 c_i + 2c_8}{2}) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 c_i - c_5 + c_6}{2}) & \wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 c_i + c_5 - c_6}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \wp(c_6) & 0 \\ 0 & f - \wp(c_5) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 c_i + 2c_5}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 c_i + 2c_6}{2}) \end{pmatrix} \\
 (2.1) \quad & \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{c_1 + c_2 - c_3 + c_4}{2}) & \wp(2t - \frac{c_1 + c_2 + c_3 - c_4}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \wp(c_4) & 0 \\ 0 & f - \wp(c_3) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{c_1 + c_2 + 2c_3}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{c_1 + c_2 + 2c_4}{2}) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{-c_1 + c_2}{2}) & \wp(2t - \frac{c_1 - c_2}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \wp(c_2) & 0 \\ 0 & f - \wp(c_1) \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - c_1) \\ 1 & -\wp(2t - c_2) \end{pmatrix} g.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{f} = & \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 d_i - d_7 + d_8}{2}) & \wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 d_i + d_7 - d_8}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - \wp(d_8) & 0 \\ 0 & g - \wp(d_7) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 d_i + 2d_7}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^6 d_i + 2d_8}{2}) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 d_i - d_5 + d_6}{2}) & \wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 d_i + d_5 - d_6}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - \wp(d_6) & 0 \\ 0 & g - \wp(d_5) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 d_i + 2d_5}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{\sum_{i=1}^4 d_i + 2d_6}{2}) \end{pmatrix} \\
(2.2) \quad & \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{d_1 + d_2 - d_3 + d_4}{2}) & \wp(2t - \frac{d_1 + d_2 + d_3 - d_4}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - \wp(d_4) & 0 \\ 0 & g - \wp(d_3) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - \frac{d_1 + d_2 + 2d_3}{2}) \\ 1 & -\wp(2t - \frac{d_1 + d_2 + 2d_4}{2}) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{-d_1 + d_2}{2}) & \wp(2t - \frac{d_1 - d_2}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - \wp(d_2) & 0 \\ 0 & g - \wp(d_1) \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - d_1) \\ 1 & -\wp(2t - d_2) \end{pmatrix} f.
\end{aligned}$$

ただし, $\bar{g} = g(t + \lambda)$, $\underline{f} = f(t - \lambda)$, $\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 b_i$, $c_i = b_i + t$, $d_i = t - b_i$ である. \square

この項ではこの定理の導出について説明する.

$A_0^{(1)}$ 型の曲面は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の曲面を 8 回ブローアップして構成できるが, (f, g) を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非斉次座標として, ブローアップする 8 点の位置とそれら 8 点の満たす曲線が以下で与えられているとする.

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad & (f + g + \wp(2t))(4fg\wp(2t) - g_3) = \left(fg + (f + g)\wp(2t) + \frac{g_2}{4} \right)^2, \\
& p_i: (\wp(b_i + t), \wp(t - b_i)) \quad (i = 1, \dots, 8).
\end{aligned}$$

このとき, 周期写像を用いたパラメータ付けとの対応は

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad & \chi(\alpha_1) = -4t, \quad \chi(\alpha_2) = b_1 + b_2 + 2t, \quad \chi(\alpha_i) = b_i - b_{i-1} \quad (i = 3, \dots, 7), \\
& \chi(\alpha_8) = b_2 - b_1, \quad \chi(\alpha_0) = b_8 - b_7
\end{aligned}$$

となる (付録 A 参照)

これらの座標およびパラメータへのアフィンワイル群 $W(E_8^{(1)}) = \langle w_i \ (i = 0, 1, \dots, 8) \rangle$ の生成元的作用は, 以下のように記述される.

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$(2.5) \quad w_2: \left(\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{array}, t, g \right) \\ \mapsto \left(\begin{array}{cccc} b_1 - 3\frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_2 - 3\frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_3 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_4 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} \\ b_5 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_6 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_7 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_8 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} \end{array}, t - \frac{2t+b_1+b_2}{4}, \tilde{g} \right), \\ w_1: (t, f, g) \mapsto (-t, g, f), \quad w_i: (b_{i-1}, b_i) \mapsto (b_i, b_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7), \\ w_8: (b_1, b_2) \mapsto (b_2, b_1), \quad w_0: (b_7, b_8) \mapsto (b_8, b_7),$$

ただし, \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - \wp\left(2t - \frac{b_1 - b_2}{2}\right)}{\tilde{g} - \wp\left(2t - \frac{-b_1 + b_2}{2}\right)} = \frac{f - \wp(b_2 + t) \ g - \wp(t - b_1)}{f - \wp(b_1 + t) \ g - \wp(t - b_2)}$$

を満たす.

注. [14]において, $(x : y : z)$ を \mathbb{P}^2 の座標とする平面を 9 回ブローアップして, $A_0^{(1)}$ 型の曲面を構成している.

$$(2.6) \quad y^2 z = 4x^3 - g_2 x^2 z - g_3 z^3, \\ p_i: (\wp(\theta_i) : \wp'(\theta_i) : 1) \quad (i = 1, \dots, 9),$$

$$(2.7) \quad \chi(\alpha_i) = \theta_{i+1} - \theta_i \quad (i = 1, \dots, 7), \quad \chi(\alpha_8) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \quad \chi(\alpha_0) = \theta_9 - \theta_8.$$

上記とのパラメータ, および座標の対応は次のようになる.

$$(2.8) \quad b_1 = -\frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad b_i = \theta_{i+1} + \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2) \quad (i = 2, \dots, 8), \quad t = \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(2.9) \quad f = \frac{(4\wp(\frac{\theta_1}{2})^3 - 3g_2\wp(\frac{\theta_1}{2}) - 4g_3) x - 2\wp(\frac{\theta_1}{2})\wp'(\frac{\theta_1}{2})y - \left(g_2\wp(\frac{\theta_1}{2})^2 + 6g_3\wp(\frac{\theta_1}{2}) + \frac{g_2^2}{4}\right) z}{-(12\wp(\frac{\theta_1}{2})^2 - g_2) x - 2\wp'(\frac{\theta_1}{2})y + (4\wp(\frac{\theta_1}{2})^3 + g_2\wp(\frac{\theta_1}{2}) + 2g_3) z},$$

$$(2.10) \quad g = \frac{(4\wp(\frac{\theta_2}{2})^3 - 3g_2\wp(\frac{\theta_2}{2}) - 4g_3) x - 2\wp(\frac{\theta_2}{2})\wp'(\frac{\theta_2}{2})y - \left(g_2\wp(\frac{\theta_2}{2})^2 + 6g_3\wp(\frac{\theta_2}{2}) + \frac{g_2^2}{4}\right) z}{-(12\wp(\frac{\theta_2}{2})^2 - g_2) x - 2\wp'(\frac{\theta_2}{2})y + (4\wp(\frac{\theta_2}{2})^3 + g_2\wp(\frac{\theta_2}{2}) + 2g_3) z}.$$

ここで, 任意の θ に対して,

$$(2.11) \quad \wp\left(\theta + \frac{\theta_1}{2}\right) \\ = \frac{(4\wp(\frac{\theta_1}{2})^3 - 3g_2\wp(\frac{\theta_1}{2}) - 4g_3) \wp(\theta) - 2\wp(\frac{\theta_1}{2})\wp'(\frac{\theta_1}{2})\wp'(\theta) - \left(g_2\wp(\frac{\theta_1}{2})^2 + 6g_3\wp(\frac{\theta_1}{2}) + \frac{g_2^2}{4}\right)}{-(12\wp(\frac{\theta_1}{2})^2 - g_2) \wp(\theta) - 2\wp'(\frac{\theta_1}{2})\wp'(\theta) + (4\wp(\frac{\theta_1}{2})^3 + g_2\wp(\frac{\theta_1}{2}) + 2g_3)},$$

$$(2.12) \quad \wp\left(\theta + \frac{\theta_2}{2}\right) \\ = \frac{(4\wp(\frac{\theta_2}{2})^3 - 3g_2\wp(\frac{\theta_2}{2}) - 4g_3)\wp(\theta) - 2\wp(\frac{\theta_2}{2})\wp'(\frac{\theta_2}{2})\wp'(\theta) - (g_2\wp(\frac{\theta_2}{2})^2 + 6g_3\wp(\frac{\theta_2}{2}) + \frac{g_2^2}{4})}{-(12\wp(\frac{\theta_2}{2})^2 - g_2)\wp(\theta) - 2\wp'(\frac{\theta_2}{2})\wp'(\theta) + (4\wp(\frac{\theta_2}{2})^3 + g_2\wp(\frac{\theta_2}{2}) + 2g_3)}$$

となることに注意する．この式は \wp 関数の加法公式ともみなせる．

ここで，表記の便宜のために，次のパラメータを導入する．

$$c_i = b_i + t \quad (i = 1, \dots, 8).$$

新しいパラメータ c_i へのアフィンワイル群の生成元の作用は，以下のようになる．

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$(2.13) \quad \begin{aligned} w_2: (c_1, c_2, t, g) &\mapsto (-c_2, -c_1, t - \frac{c_1+c_2}{4}, \tilde{g}), \\ w_1: (c_i, t, f, g) &\mapsto (c_i - 2t, -t, g, f) \quad (i = 1, \dots, 8), \\ w_i: (c_{i-1}, c_i) &\mapsto (c_i, c_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7), \\ w_8: (c_1, c_2) &\mapsto (c_2, c_1), \quad w_0: (c_7, c_8) \mapsto (c_8, c_7). \end{aligned}$$

ここで \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - \wp\left(2t - \frac{c_1-c_2}{2}\right)}{\tilde{g} - \wp\left(2t - \frac{-c_1+c_2}{2}\right)} = \frac{f - \wp(c_2)g - \wp(2t - c_1)}{f - \wp(c_1)g - \wp(2t - c_2)}$$

を満たすが，この変換は g への PGL の作用

$$(2.14) \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} -\wp(2t - \frac{-c_1+c_2}{2}) & \wp(2t - \frac{c_1-c_2}{2}) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \wp(c_2) & 0 \\ 0 & f - \wp(c_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\wp(2t - c_1) \\ 1 & -\wp(2t - c_2) \end{pmatrix} g$$

で表わせる（本論文では行列は全て PGL の作用を表すものとする）

$W(E_8^{(1)})$ の平行移動を一つ選ぶことで , 非線形の差分方程式が得られる .

$A_0^{(1)}$ -surface P

$$(2.15) \quad \begin{aligned} = & w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ \\ & \circ w_2 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_0 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1 \circ \\ & \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_0 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_2 \circ w_3 \circ \\ & \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_2 : \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad (b_i, t, f, g) \mapsto (b_i, t + \lambda, \bar{f}, \bar{g}) \quad (i = 1, \dots, 8), \quad \lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 b_i.$$

ただし , f, g の時間発展は (2.1), (2.2) で定められるものとなる .

2.2 Hypergeometric equation

定理 2. $A_0^{(1)}$ 型曲面パウルヴェ方程式 (2.1), (2.2) において , パラメータが $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系は次で与えられる .

$$(2.17) \quad \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \wp(b_1 + t)\wp(t - b_1) & \wp(t - b_1) & \wp(b_1 + t) & 1 \\ \wp(b_3 + t)\wp(t - b_3) & \wp(t - b_3) & \wp(b_3 + t) & 1 \\ \wp(b_5 + t)\wp(t - b_5) & \wp(t - b_5) & \wp(b_5 + t) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2.18) \quad \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ \wp(b_8 + t)\wp(\bar{t} - b_8) & \wp(\bar{t} - b_8) & \wp(b_8 + t) & 1 \\ \wp(b_6 + t)\wp(\bar{t} - b_6) & \wp(\bar{t} - b_6) & \wp(b_6 + t) & 1 \\ \wp(b_4 + t)\wp(\bar{t} - b_4) & \wp(\bar{t} - b_4) & \wp(b_4 + t) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ただし , $\bar{t} = t + \lambda$ である .

□

この項ではこの定理の導出について説明する .

パラメータが $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ のときの特殊解を考察する .

このとき次の曲線 I を考える .

$$(2.19) \quad I = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \wp(b_1 + t)\wp(t - b_1) & \wp(t - b_1) & \wp(b_1 + t) & 1 \\ \wp(b_3 + t)\wp(t - b_3) & \wp(t - b_3) & \wp(b_3 + t) & 1 \\ \wp(b_5 + t)\wp(t - b_5) & \wp(t - b_5) & \wp(b_5 + t) & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \wp(c_1)\wp(2t - c_1) & \wp(2t - c_1) & \wp(c_1) & 1 \\ \wp(c_3)\wp(2t - c_3) & \wp(2t - c_3) & \wp(c_3) & 1 \\ \wp(c_5)\wp(2t - c_5) & \wp(2t - c_5) & \wp(c_5) & 1 \end{vmatrix} .$$

この曲線 I への w_2 の作用を計算すると次のようになる .

$$(2.20) \quad \tilde{I} = \begin{vmatrix} f\tilde{g} & \tilde{g} & f & 1 \\ \wp(c_2)\wp(2\tilde{t} + c_2) & \wp(2\tilde{t} + c_2) & \wp(c_2) & 1 \\ \wp(c_3)\wp(2\tilde{t} - c_3) & \wp(2\tilde{t} - c_3) & \wp(c_3) & 1 \\ \wp(c_5)\wp(2\tilde{t} - c_5) & \wp(2\tilde{t} - c_5) & \wp(c_5) & 1 \end{vmatrix} \\ = I (f - \wp(c_2))(\wp(c_2) - \wp(c_3))(\wp(c_2) - \wp(c_5)) \\ \cdot (\wp(2t - c_1) - \wp(2t - c_2))(\wp(2\tilde{t} + c_2) - \wp(2\tilde{t} + c_1))^2 \\ \cdot \left(\begin{vmatrix} f & g & 1 \\ \wp(c_1) & \wp(2t - c_1) & 1 \\ \wp(c_2) & \wp(2t - c_2) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \wp(c_1) & \wp(2t - c_1) & 1 \\ \wp(c_2) & \wp(2t - c_2) & 1 \\ \wp(c_3) & \wp(2t - c_3) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \wp(c_1) & \wp(2t - c_1) & 1 \\ \wp(c_2) & \wp(2t - c_2) & 1 \\ \wp(c_5) & \wp(2t - c_5) & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1} .$$

ゆえに $I = 0 \implies \tilde{I} = 0$ が成り立つ . このようなワイル群の作用を合成することで ,

$$(2.21) \quad \mathcal{I} = \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ \wp(b_8 + t)\wp(\bar{t} - b_8) & \wp(\bar{t} - b_8) & \wp(b_8 + t) & 1 \\ \wp(b_6 + t)\wp(\bar{t} - b_6) & \wp(\bar{t} - b_6) & \wp(b_6 + t) & 1 \\ \wp(b_4 + t)\wp(\bar{t} - b_4) & \wp(\bar{t} - b_4) & \wp(b_4 + t) & 1 \end{vmatrix}$$

について $I = 0 \implies \mathcal{I} = 0$ が成り立ち , 結局 ,

$$(2.22) \quad \bar{I} = \begin{vmatrix} \bar{f}\bar{g} & \bar{g} & \bar{f} & 1 \\ \wp(b_1 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_1) & \wp(\bar{t} - b_1) & \wp(b_1 + \bar{t}) & 1 \\ \wp(b_3 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_3) & \wp(\bar{t} - b_3) & \wp(b_3 + \bar{t}) & 1 \\ \wp(b_5 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_5) & \wp(\bar{t} - b_5) & \wp(b_5 + \bar{t}) & 1 \end{vmatrix}$$

について, $I = 0 \implies \bar{I} = 0$ を得る. このことは, $I = 0$ を満たす f, g が $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ のときの特解となることを意味する.

ゆえに, 特解 f, g について (2.17), (2.18) が成り立つ.

この式を解き直すと,

$$(2.23) \quad \bar{g} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \wp(b_8 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_8) & \wp(\bar{t} - b_8) & 1 \\ \wp(b_6 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_6) & \wp(\bar{t} - b_6) & 1 \\ \wp(b_4 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_4) & \wp(\bar{t} - b_4) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \wp(b_8 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_8) & 1 \\ \wp(b_6 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_6) & 1 \\ \wp(b_4 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_4) & 1 \end{vmatrix}} f + \frac{\begin{vmatrix} \wp(b_8 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_8) & \wp(b_8 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_8) \\ \wp(b_6 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_6) & \wp(b_6 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_6) \\ \wp(b_4 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_4) & \wp(b_4 + \bar{t}) & \wp(\bar{t} - b_4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \wp(b_8 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_8) & \wp(b_8 + \bar{t}) & 1 \\ \wp(b_6 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_6) & \wp(b_6 + \bar{t}) & 1 \\ \wp(b_4 + \bar{t})\wp(\bar{t} - b_4) & \wp(b_4 + \bar{t}) & 1 \end{vmatrix}},$$

$$(2.24) \quad f =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \wp(b_1 + t)\wp(t - b_1) & \wp(b_1 + t) & 1 \\ \wp(b_3 + t)\wp(t - b_3) & \wp(b_3 + t) & 1 \\ \wp(b_5 + t)\wp(t - b_5) & \wp(b_5 + t) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \wp(t - b_1) & \wp(b_1 + t) & 1 \\ \wp(t - b_3) & \wp(b_3 + t) & 1 \\ \wp(t - b_5) & \wp(b_5 + t) & 1 \end{vmatrix}} g + \frac{\begin{vmatrix} \wp(b_1 + t)\wp(t - b_1) & \wp(t - b_1) & \wp(b_1 + t) \\ \wp(b_3 + t)\wp(t - b_3) & \wp(t - b_3) & \wp(b_3 + t) \\ \wp(b_5 + t)\wp(t - b_5) & \wp(t - b_5) & \wp(b_5 + t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \wp(b_1 + t)\wp(t - b_1) & \wp(t - b_1) & 1 \\ \wp(b_3 + t)\wp(t - b_3) & \wp(t - b_3) & 1 \\ \wp(b_5 + t)\wp(t - b_5) & \wp(t - b_5) & 1 \end{vmatrix}}$$

となる. この式から, f を消去することで, g に関する線型方程式が得られる.

米田, 坂井との共同研究 [15] で導出した線型方程式は次のようなものであった.

$$(2.25) \quad \bar{g} = T_{t+a-2\mu_{456}+\mu, t+a-2\mu_{456}+\mu, t+a_6-2\mu_{456}+\mu, t+a-2\mu_{456}+\mu} \\ T_{2t+a_7+2\mu_{123}+\mu_{456}, 2t+a_8+2\mu_{123}+\mu_{456}, 2t+a_9+2\mu_{123}+\mu_{456}, -t+a-\mu_{123}-2\mu_{456}} \\ T_{t+a+\mu_{123}, t+a+\mu_{123}, t+a_6+\mu_{123}, t+a+\mu_{123}} T_{2t+a_1, 2t+a_2, 2t+a_3, -t+a} g.$$

ただし,

$$T_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \begin{pmatrix} \wp'(\alpha - 2\sigma) - \wp'(\delta + \sigma) & \wp'(\beta - 2\sigma) - \wp'(\delta + \sigma) & \wp'(\gamma - 2\sigma) - \wp'(\delta + \sigma) \\ \wp(\alpha - 2\sigma) - \wp(\delta + \sigma) & \wp(\beta - 2\sigma) - \wp(\delta + \sigma) & \wp(\gamma - 2\sigma) - \wp(\delta + \sigma) \end{pmatrix} \\ \cdot \begin{pmatrix} l_{0,\beta,\gamma} l_{\sigma,\beta-2\sigma,\gamma-2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & l_{0,\gamma,\alpha} l_{\sigma,\gamma-2\sigma,\alpha-2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & l_{0,\alpha,\beta} l_{\sigma,\alpha-2\sigma,\beta-2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & l_{\delta,\alpha,\beta} & l_{\delta,\gamma,\alpha} \\ l_{\delta,\alpha,\beta} & 0 & l_{\delta,\beta,\gamma} \\ l_{\delta,\gamma,\alpha} & l_{\delta,\beta,\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{0,\beta,\gamma} & -l'_{0,\beta,\gamma} \\ l_{0,\gamma,\alpha} & -l'_{0,\gamma,\alpha} \\ l_{0,\alpha,\beta} & -l'_{0,\alpha,\beta} \end{pmatrix},$$

$$T_{\alpha,\alpha,\gamma,\alpha} = \begin{pmatrix} \wp'(\gamma - 2\sigma) - \wp'(\alpha - 2\sigma) & \wp'(\gamma + \sigma) - \wp'(\alpha - 2\sigma) \\ \wp(\gamma - 2\sigma) - \wp(\alpha - 2\sigma) & \wp(\gamma + \sigma) - \wp(\alpha - 2\sigma) \end{pmatrix} \\ \cdot \begin{pmatrix} 2\wp'(\alpha) l_{\sigma,\gamma+\sigma,\alpha-2\sigma} & 0 \\ 0 & l_{0,\alpha,\gamma} l_{\sigma,\alpha-2\sigma,\gamma-2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{0,\alpha,\gamma} & -l'_{0,\alpha,\gamma} \\ 2\wp'(\alpha) & -(12\wp^2(\alpha) - g_2) \end{pmatrix},$$

$$l_{\alpha,\beta}(x : y : z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \wp(\alpha) & \wp'(\alpha) & 1 \\ \wp(\beta) & \wp'(\beta) & 1 \end{vmatrix}, \quad l_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \wp(\alpha) & \wp'(\alpha) & 1 \\ \wp(\beta) & \wp'(\beta) & 1 \\ \wp(\gamma) & \wp'(\gamma) & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mu = \mu_{123} + \mu_{456} + \mu_{789} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^9 a_i, \quad \mu_{ijk} = \frac{a_i + a_j + a_k}{3}, \quad \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

これと比べると, (2.17),(2.18) の表式が簡明なものになっていることが分かる.

3 Multiplicative type

Elliptic type において, $g_2 = \frac{4}{3}(1 + 3\epsilon^2)$, $g_3 = -\frac{8}{27}(1 - 9\epsilon^2)$ として, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることで, Multiplicative type に移行する. このとき, $\wp(x) \rightarrow \frac{1}{\sinh^2 x} + \frac{1}{3}$ に注意する.

更に, 移行元の座標とパラメータを大文字, 移行先の座標とパラメータを小文字で表わして (以下, 各曲面の座標とパラメータの変換ではこの表記を常に用いる), $t = e^{2T}$, $\lambda = e^{2\Lambda}$, $F = 2\frac{f+\frac{5}{3}}{f-\frac{1}{3}}$, $G = 2\frac{g+\frac{5}{3}}{g-\frac{1}{3}}$, $b_i = e^{2B_i}$ と座標とパラメータを変換する.

3.1 Painlevé equation

定理 3. $A_0^{(1)}$ 型曲面パルヴェ方程式 (2.1), (2.2) は, \wp 関数の不変量を $g_2 = \frac{4}{3}(1 + 3\epsilon^2)$, $g_3 = -\frac{8}{27}(1 - 9\epsilon^2)$ と置いて $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとり, 更に $t = e^{2T}$, $\lambda = e^{2\Lambda}$, $F = 2\frac{f+\frac{5}{3}}{f-\frac{1}{3}}$, $G = 2\frac{g+\frac{5}{3}}{g-\frac{1}{3}}$, $b_i = e^{2B_i}$ と置くことで, 次の $A_0^{(1)*}$ 型曲面パルヴェ方程式に移行する.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\bar{g}t^2\lambda - f)(gt^2 - f) - (t^4\lambda^2 - 1)(t^4 - 1)}{(\bar{g}/(t^2\lambda) - f)(g/t^2 - f) - (1 - 1/(t^4\lambda^2))(1 - 1/t^4)} \\
 (3.1) \quad & = \lambda^2(f^4 - m_1tf^3 + (m_2t^2 - 3 - m_8t^8)f^2 + (m_7t^7 - m_3t^3 + 2m_1t)f \\
 & \quad + m_8t^8 - m_6t^6 + m_4t^4 - m_2t^2 + 1) \\
 & \quad \cdot (m_8f^4 - m_7f^3/t + (m_6/t^2 - 3m_8 - 1/t^8)f^2 + (m_1/t^7 - m_5/t^3 + 2m_7/t)f \\
 & \quad + 1/t^8 - m_2/t^6 + m_4/t^4 - m_6/t^2 + m_8)^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(ft^2/\lambda - g)(ft^2 - g) - (t^4/\lambda^2 - 1)(t^4 - 1)}{(\underline{f}\lambda/t^2 - g)(f/t^2 - g) - (1 - \lambda^2/t^4)(1 - 1/t^4)} \\
 (3.2) \quad & = \frac{1}{\lambda^2}(m_8g^4 - m_7tg^3 + (m_6t^2 - 3m_8 - t^8)g^2 + (m_1t^7 - m_5t^3 + 2m_7t)g \\
 & \quad + t^8 - m_2t^6 + m_4t^4 - m_6t^2 + m_8) \\
 & \quad \cdot (g^4 - m_1g^3/t + (m_2/t^2 - 3 - m_8/t^8)g^2 + (m_7/t^7 - m_3/t^3 + 2m_1/t)g \\
 & \quad + m_8/t^8 - m_6/t^6 + m_4/t^4 - m_2/t^2 + 1)^{-1}.
 \end{aligned}$$

ただし, $\bar{g} = g(t\lambda)$, $\underline{f} = f(t/\lambda)$, $\lambda = \sqrt{\prod_{i=1}^8 b_i}$ であり, m_i は b_j ($j = 1, \dots, 8$) に関する i 次の基本対称式とする. □

この項ではこの定理の導出について説明する.

$A_0^{(1)*}$ 型の曲面は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の曲面を 8 回ブローアップして構成できるが, (f, g) を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非斉次座標として, ブローアップする 8 点の位置とそれら 8 点の満たす曲線が以下で与えられているとする.

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f^2 + g^2 - \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) fg + \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 &= 0, \\ p_i: \left(b_i t + \frac{1}{b_i t}, \frac{t}{b_i} + \frac{b_i}{t}\right) \quad (i = 1, \dots, 8). \end{aligned}$$

また, 周期写像を用いたパラメータ付けとの対応は

$$(3.4) \quad \begin{aligned} e^{2\chi(\alpha_1)} &= t^{-4}, & e^{2\chi(\alpha_2)} &= b_1 b_2 t^2, & e^{2\chi(\alpha_i)} &= b_i / b_{i-1} \quad (i = 3, \dots, 7), \\ e^{2\chi(\alpha_8)} &= b_2 / b_1, & e^{2\chi(\alpha_0)} &= b_8 / b_7 \end{aligned}$$

となる.

これらの座標およびパラメータへのアフィンワイル群 $W(E_8^{(1)}) = \langle w_i \ (i = 0, 1, \dots, 8) \rangle$ の生成元の作用は, 以下のように記述される.

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$(3.5) \quad \begin{aligned} w_2: & \left(\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{array}, t, g \right) \\ & \mapsto \left(\begin{array}{cccc} b_1 / (\sqrt[4]{b_1 b_2 t^2})^3 & b_2 / (\sqrt[4]{b_1 b_2 t^2})^3 & b_3 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} & b_4 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} \\ b_5 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} & b_6 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} & b_7 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} & b_8 \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2} \end{array}, t / \sqrt[4]{b_1 b_2 t^2}, \tilde{g} \right), \\ w_1: & (t, f, g) \mapsto (1/t, g, f), \quad w_i: (b_{i-1}, b_i) \mapsto (b_i, b_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7), \\ & w_8: (b_1, b_2) \mapsto (b_2, b_1), \quad w_0: (b_7, b_8) \mapsto (b_8, b_7), \end{aligned}$$

ただし, \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - \left(\sqrt{\frac{b_2}{b_1} t^2} + \sqrt{\frac{b_1}{b_2} \frac{1}{t^2}}\right)}{\tilde{g} - \left(\sqrt{\frac{b_1}{b_2} t^2} + \sqrt{\frac{b_2}{b_1} \frac{1}{t^2}}\right)} = \frac{f - \left(b_2 t + \frac{1}{b_2 t}\right) g - \left(\frac{t}{b_1} + \frac{b_1}{t}\right)}{f - \left(b_1 t + \frac{1}{b_1 t}\right) g - \left(\frac{t}{b_2} + \frac{b_2}{t}\right)}$$

を満たす.

注. [14] において, $(x : y : z)$ を \mathbb{P}^2 の座標とする平面を 9 回ブローアップして, $A_0^{(1)*}$ 型の曲面を構成している.

$$(3.6) \quad y^2 z = 4x^2(x + z),$$

$$p_i: \left(\frac{1}{\sinh^2 \theta_i} : \frac{-2 \cosh \theta_i}{\sinh^3 \theta_i} : 1 \right) \quad (i = 1, \dots, 9),$$

$$(3.7) \quad \chi(\alpha_i) = \theta_{i+1} - \theta_i \quad (i = 1, \dots, 7), \quad \chi(\alpha_8) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \quad \chi(\alpha_0) = \theta_9 - \theta_8.$$

上記とのパラメータ , および座標の対応は次のようになる .

$$(3.8) \quad b_1 = \exp\left(-\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right), \quad b_i = \exp\left(2\theta_{i+1} + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) \quad (i = 2, \dots, 8),$$

$$t = \exp\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right),$$

$$(3.9) \quad f = \frac{-2(1 - 6e^{2\theta_1} + e^{4\theta_1})x - (1 - e^{4\theta_1})y + 16e^{2\theta_1}z}{e^{\theta_1}(2(1 + e^{2\theta_1})x - (1 - e^{2\theta_1})y)},$$

$$(3.10) \quad g = \frac{-2(1 - 6e^{2\theta_2} + e^{4\theta_2})x - (1 - e^{4\theta_2})y + 16e^{2\theta_2}z}{e^{\theta_2}(2(1 + e^{2\theta_2})x - (1 - e^{2\theta_2})y)}.$$

ここで , 式の計算および表記の便宜のために , 次のパラメータを導入する .

$$c_i = b_i t \quad (i = 1, \dots, 8).$$

新しいパラメータ c_i へのアフィンワイル群の生成元の作用は , 以下のようになる .

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$(3.11) \quad w_2: (c_1, c_2, t, g) \mapsto (1/c_2, 1/c_1, t/\sqrt[4]{c_1 c_2}, \tilde{g}),$$

$$w_1: (c_i, t, f, g) \mapsto (c_i/t^2, 1/t, g, f) \quad (i = 1, \dots, 8),$$

$$w_i: (c_{i-1}, c_i) \mapsto (c_i, c_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7),$$

$$w_8: (c_1, c_2) \mapsto (c_2, c_1), \quad w_0: (c_7, c_8) \mapsto (c_8, c_7).$$

ここで \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - \left(\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}t^2 + \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\frac{1}{t^2}\right)}{\tilde{g} - \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t^2 + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{f - \left(c_2 + \frac{1}{c_2}\right)g - \left(\frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2}\right)}{f - \left(c_1 + \frac{1}{c_1}\right)g - \left(\frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2}\right)}$$

を満たすが , G, \tilde{G} を

$$G = \frac{gt^2 - f}{t^4 - 1}, \quad \tilde{G} = \frac{\tilde{g}\frac{t^2}{\sqrt{c_1 c_2}} - f}{\frac{t^4}{c_1 c_2} - 1}$$

と置くと , この作用は G の一次分数変換を用いて

$$(3.12) \quad \tilde{G} = \frac{(c_1 c_2 f - c_1 - c_2)G - (c_1 c_2 - 1)}{(c_1 c_2 - 1)G + (f - c_1 - c_2)}$$

と記述できる . よって変換は PGL の作用

$$(3.13) \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 f - c_1 - c_2 & -(c_1 c_2 - 1) \\ c_1 c_2 - 1 & f - c_1 - c_2 \end{pmatrix} G$$

で表わせる .

$W(E_8^{(1)})$ の平行移動を一つ選ぶことで , 非線形の差分方程式が得られる .

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(1)*}\text{-surface } P \\
 (3.14) \quad & = w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ \\
 & \circ w_2 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_0 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1 \circ \\
 & \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_0 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_2 \circ w_3 \circ \\
 & \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_2 \quad :
 \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad (b_i, t, f, g) \mapsto (b_i, t\lambda, \bar{f}, \bar{g}) \quad (i = 1, \dots, 8), \quad \lambda = \sqrt{\prod_{i=1}^8 b_i}.$$

ここで , \bar{g} は G, \mathcal{G} を

$$G = \frac{gt^2 - f}{t^4 - 1}, \quad \mathcal{G} = \frac{\bar{g} \frac{t^2}{\sqrt{\prod_{i=1}^8 c_i}} - f}{\frac{t^4}{\prod_{i=1}^8 c_i} - 1} = \frac{\bar{g} \frac{1}{t^2 \lambda} - f}{\frac{1}{t^4 \lambda^2} - 1}$$

と置くことで , 以下のように記述できる .

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad \mathcal{G} & = \begin{pmatrix} c_7 c_8 f - c_7 - c_8 & -(c_7 c_8 - 1) \\ c_7 c_8 - 1 & f - c_7 - c_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_5 c_6 f - c_5 - c_6 & -(c_5 c_6 - 1) \\ c_5 c_6 - 1 & f - c_5 - c_6 \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} c_3 c_4 f - c_3 - c_4 & -(c_3 c_4 - 1) \\ c_3 c_4 - 1 & f - c_3 - c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 c_2 f - c_1 - c_2 & -(c_1 c_2 - 1) \\ c_1 c_2 - 1 & f - c_1 - c_2 \end{pmatrix} G \\
 & = \begin{pmatrix} t^8 D & -(t^8 D - N)/f \\ (t^8 D - N)/f & N \end{pmatrix} G,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad N & = f^4 - m_1 t f^3 + (m_2 t^2 - 3 - m_8 t^8) f^2 + (m_7 t^7 - m_3 t^3 + 2m_1 t) f \\
 & \quad + m_8 t^8 - m_6 t^6 + m_4 t^4 - m_2 t^2 + 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad D & = m_8 f^4 - m_7 f^3/t + (m_6/t^2 - 3m_8 - 1/t^8) f^2 + (m_1/t^7 - m_5/t^3 + 2m_7/t) f \\
 & \quad + 1/t^8 - m_2/t^6 + m_4/t^4 - m_6/t^2 + m_8.
 \end{aligned}$$

ここで m_i は b_j に関する i 次の基本対称式である . この式は

$$(3.19) \quad t^8 \frac{G(\mathcal{G} - f) + 1}{\mathcal{G}(G - f) + 1} = \frac{N}{D}$$

とまとめられるので，故に g の時間発展を記述する方程式は (3.1) となる．

同様に， f についても F, \mathcal{F} を

$$F = \frac{f \frac{1}{t^2} - g}{\frac{1}{t^4} - 1}, \quad \mathcal{F} = \frac{f \frac{1}{t^2 \sqrt{\prod_{i=1}^8 d_i}} - g}{\frac{1}{t^4 \prod_{i=1}^8 d_i} - 1} = \frac{f \frac{t^2}{\lambda} - g}{\frac{t^4}{\lambda^2} - 1}$$

と置くことで，以下のように記述できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} d_7 d_8 g - d_7 - d_8 & -(d_7 d_8 - 1) \\ d_7 d_8 - 1 & g - d_7 - d_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_5 d_6 g - d_5 - d_6 & -(d_5 d_6 - 1) \\ d_5 d_6 - 1 & g - d_5 - d_6 \end{pmatrix} \\ (3.20) \quad &\cdot \begin{pmatrix} d_3 d_4 g - d_3 - d_4 & -(d_3 d_4 - 1) \\ d_3 d_4 - 1 & g - d_3 - d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 d_2 g - d_1 - d_2 & -(d_1 d_2 - 1) \\ d_1 d_2 - 1 & g - d_1 - d_2 \end{pmatrix} F \\ &= \begin{pmatrix} \nabla/t^8 & -(\nabla/t^8 - \Delta)/g \\ (\nabla/t^8 - \Delta)/g & \Delta \end{pmatrix} F, \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad \nabla = m_8 g^4 - m_7 t g^3 + (m_6 t^2 - 3m_8 - t^8) g^2 + (m_1 t^7 - m_5 t^3 + 2m_7 t) g \\ + t^8 - m_2 t^6 + m_4 t^4 - m_6 t^2 + m_8,$$

$$(3.22) \quad \Delta = g^4 - m_1 g^3/t + (m_2/t^2 - 3 - m_8/t^8) g^2 + (m_7/t^7 - m_3/t^3 + 2m_1/t) g \\ + m_8/t^8 - m_6/t^6 + m_4/t^4 - m_2/t^2 + 1.$$

この式は

$$(3.23) \quad t^8 \frac{\mathcal{F}(F - g) + 1}{F(\mathcal{F} - g) + 1} = \frac{\nabla}{\Delta}$$

とまとめられるので，故に f の時間発展を記述する方程式は (3.2) となる．

これらは太田ら [1] の導出した方程式と一致する．

3.2 Hypergeometric equation

定理 4. $A_0^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式においてパラメータが $B_1 + B_3 + B_5 + B_7 = 0$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系 (2.17), (2.18) は, \wp 関数の不変量を $g_2 = \frac{4}{3}(1 + 3\epsilon^2)$, $g_3 = -\frac{8}{27}(1 - 9\epsilon^2)$ と置いて $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとり, 更に $t = e^{2T}$, $\lambda = e^{2\Lambda}$, $F = 2\frac{f+\frac{5}{3}}{f-\frac{1}{3}}$, $G = 2\frac{g+\frac{5}{3}}{g-\frac{1}{3}}$, $b_i = e^{2B_i}$ と置くことで, 次の $A_0^{(1)*}$ 型曲面パンルヴェ方程式 (3.1), (3.2) においてパラメータが $b_1 b_3 b_5 b_7 = 1$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系に移行する.

$$(3.24) \quad \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \left(b_1 t + \frac{1}{b_1 t}\right) \left(\frac{t}{b_1} + \frac{b_1}{t}\right) & \frac{t}{b_1} + \frac{b_1}{t} & b_1 t + \frac{1}{b_1 t} & 1 \\ \left(b_3 t + \frac{1}{b_3 t}\right) \left(\frac{t}{b_3} + \frac{b_3}{t}\right) & \frac{t}{b_3} + \frac{b_3}{t} & b_3 t + \frac{1}{b_3 t} & 1 \\ \left(b_5 t + \frac{1}{b_5 t}\right) \left(\frac{t}{b_5} + \frac{b_5}{t}\right) & \frac{t}{b_5} + \frac{b_5}{t} & b_5 t + \frac{1}{b_5 t} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3.25) \quad \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ \left(b_8 t + \frac{1}{b_8 t}\right) \left(\frac{\bar{t}}{b_8} + \frac{b_8}{\bar{t}}\right) & \frac{\bar{t}}{b_8} + \frac{b_8}{\bar{t}} & b_8 t + \frac{1}{b_8 t} & 1 \\ \left(b_6 t + \frac{1}{b_6 t}\right) \left(\frac{\bar{t}}{b_6} + \frac{b_6}{\bar{t}}\right) & \frac{\bar{t}}{b_6} + \frac{b_6}{\bar{t}} & b_6 t + \frac{1}{b_6 t} & 1 \\ \left(b_4 t + \frac{1}{b_4 t}\right) \left(\frac{\bar{t}}{b_4} + \frac{b_4}{\bar{t}}\right) & \frac{\bar{t}}{b_4} + \frac{b_4}{\bar{t}} & b_4 t + \frac{1}{b_4 t} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ただし, $\bar{t} = t\lambda$ である. □

この項ではこの定理の導出について説明する.

パラメータが $b_1 b_3 b_5 b_7 = 1$ のときの特殊解を考察する.

このとき次の曲線 I を考える.

$$(3.26) \quad I = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \left(b_1 t + \frac{1}{b_1 t}\right) \left(\frac{t}{b_1} + \frac{b_1}{t}\right) & \frac{t}{b_1} + \frac{b_1}{t} & b_1 t + \frac{1}{b_1 t} & 1 \\ \left(b_3 t + \frac{1}{b_3 t}\right) \left(\frac{t}{b_3} + \frac{b_3}{t}\right) & \frac{t}{b_3} + \frac{b_3}{t} & b_3 t + \frac{1}{b_3 t} & 1 \\ \left(b_5 t + \frac{1}{b_5 t}\right) \left(\frac{t}{b_5} + \frac{b_5}{t}\right) & \frac{t}{b_5} + \frac{b_5}{t} & b_5 t + \frac{1}{b_5 t} & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ \left(c_1 + \frac{1}{c_1}\right) \left(\frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2}\right) & \frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} & c_1 + \frac{1}{c_1} & 1 \\ \left(c_3 + \frac{1}{c_3}\right) \left(\frac{t^2}{c_3} + \frac{c_3}{t^2}\right) & \frac{t^2}{c_3} + \frac{c_3}{t^2} & c_3 + \frac{1}{c_3} & 1 \\ \left(c_5 + \frac{1}{c_5}\right) \left(\frac{t^2}{c_5} + \frac{c_5}{t^2}\right) & \frac{t^2}{c_5} + \frac{c_5}{t^2} & c_5 + \frac{1}{c_5} & 1 \end{vmatrix}.$$

この曲線 I への w_2 の作用を計算すると次のようになる .

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} &= \begin{vmatrix} f\tilde{g} & \tilde{g} & f & 1 \\ \left(c_2 + \frac{1}{c_2}\right) \left(c_2\tilde{t}^2 + \frac{1}{c_2\tilde{t}^2}\right) & c_2\tilde{t}^2 + \frac{1}{c_2\tilde{t}^2} & c_2 + \frac{1}{c_2} & 1 \\ \left(c_3 + \frac{1}{c_3}\right) \left(\frac{\tilde{t}^2}{c_3} + \frac{c_3}{\tilde{t}^2}\right) & \frac{\tilde{t}^2}{c_3} + \frac{c_3}{\tilde{t}^2} & c_3 + \frac{1}{c_3} & 1 \\ \left(c_5 + \frac{1}{c_5}\right) \left(\frac{\tilde{t}^2}{c_5} + \frac{c_5}{\tilde{t}^2}\right) & \frac{\tilde{t}^2}{c_5} + \frac{c_5}{\tilde{t}^2} & c_5 + \frac{1}{c_5} & 1 \end{vmatrix} \\
 &= I \left(f - \left(c_2 + \frac{1}{c_2} \right) \right) \left(\left(c_2 + \frac{1}{c_2} \right) - \left(c_3 + \frac{1}{c_3} \right) \right) \left(\left(c_2 + \frac{1}{c_2} \right) - \left(c_5 + \frac{1}{c_5} \right) \right) \\
 (3.27) \quad &\cdot \left(\left(\frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} \right) - \left(\frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2} \right) \right) \left(\left(c_2\tilde{t}^2 + \frac{1}{c_2\tilde{t}^2} \right) - \left(c_1\tilde{t}^2 + \frac{1}{c_1\tilde{t}^2} \right) \right)^2 \\
 &\cdot \left(\left(\begin{matrix} c_1 + \frac{1}{c_1} \\ c_2 + \frac{1}{c_2} \\ c_3 + \frac{1}{c_3} \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_3} + \frac{c_3}{t^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} c_1 + \frac{1}{c_1} \\ c_2 + \frac{1}{c_2} \\ c_5 + \frac{1}{c_5} \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_3} + \frac{c_3}{t^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right)^{-1} \\
 &\cdot \begin{vmatrix} f & g & 1 \\ \left(c_1 + \frac{1}{c_1} \right) \begin{pmatrix} \frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2} \end{pmatrix} & 1 \\ \left(c_2 + \frac{1}{c_2} \right) \begin{pmatrix} \frac{t^2}{c_1} + \frac{c_1}{t^2} \\ \frac{t^2}{c_2} + \frac{c_2}{t^2} \end{pmatrix} & 1 \end{vmatrix}^{-1} .
 \end{aligned}$$

ゆえに $I = 0 \implies \tilde{I} = 0$ が成り立つ . このようなワイル群の作用を合成することで ,

$$(3.28) \quad \mathcal{I} = \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ \left(b_8t + \frac{1}{b_8t} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_8} + \frac{b_8}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_8} + \frac{b_8}{\bar{t}} & b_8t + \frac{1}{b_8t} & 1 \\ \left(b_6t + \frac{1}{b_6t} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_6} + \frac{b_6}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_6} + \frac{b_6}{\bar{t}} & b_6t + \frac{1}{b_6t} & 1 \\ \left(b_4t + \frac{1}{b_4t} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_4} + \frac{b_4}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_4} + \frac{b_4}{\bar{t}} & b_4t + \frac{1}{b_4t} & 1 \end{vmatrix}$$

について $I = 0 \implies \mathcal{I} = 0$ が成り立ち , 結局 ,

$$(3.29) \quad \bar{I} = \begin{vmatrix} \bar{f}\bar{g} & \bar{g} & \bar{f} & 1 \\ \left(b_1\bar{t} + \frac{1}{b_1\bar{t}} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_1} + \frac{b_1}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_1} + \frac{b_1}{\bar{t}} & b_1\bar{t} + \frac{1}{b_1\bar{t}} & 1 \\ \left(b_3\bar{t} + \frac{1}{b_3\bar{t}} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_3} + \frac{b_3}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_3} + \frac{b_3}{\bar{t}} & b_3\bar{t} + \frac{1}{b_3\bar{t}} & 1 \\ \left(b_5\bar{t} + \frac{1}{b_5\bar{t}} \right) \left(\frac{\bar{t}}{b_5} + \frac{b_5}{\bar{t}} \right) & \frac{\bar{t}}{b_5} + \frac{b_5}{\bar{t}} & b_5\bar{t} + \frac{1}{b_5\bar{t}} & 1 \end{vmatrix}$$

について , $I = 0 \implies \bar{I} = 0$ を得る . このことは , $I = 0$ を満たす f, g が $b_1b_3b_5b_7 = 1$ のときの特解となることを意味する .

ゆえに , 特殊解 f, g について (3.24), (3.25) が成り立つ .

この行列式を展開した式は

$$(3.30) \quad fg \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) - f \left((b_1 + b_3 + b_5 + b_7)t - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7} \right) \frac{1}{t} \right) \\ - g \left(\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7} \right) t - (b_1 + b_3 + b_5 + b_7) \frac{1}{t} \right) \\ + \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) \left(b_1 b_3 + b_1 b_5 + b_1 b_7 + b_3 b_5 + b_3 b_7 + b_5 b_7 - \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) \right) = 0,$$

$$(3.31) \quad f\bar{g} \left(t\bar{t} - \frac{1}{t\bar{t}} \right) - f \left((b_2 + b_4 + b_6 + b_8)t - \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_6} + \frac{1}{b_8} \right) \frac{1}{t} \right) \\ - \bar{g} \left(\left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_6} + \frac{1}{b_8} \right) \bar{t} - (b_2 + b_4 + b_6 + b_8) \frac{1}{\bar{t}} \right) \\ + \left(t\bar{t} - \frac{1}{t\bar{t}} \right) \left(b_2 b_4 + b_2 b_6 + b_2 b_8 + b_4 b_6 + b_4 b_8 + b_6 b_8 - \left(t\bar{t} + \frac{1}{t\bar{t}} \right) \right) = 0$$

となる．この式を解き直すと，

$$(3.32) \quad \bar{g} = \left(f \left((b_2 + b_4 + b_6 + b_8)t - \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_6} + \frac{1}{b_8} \right) \frac{1}{t} \right) \right. \\ \left. - \left(t\bar{t} - \frac{1}{t\bar{t}} \right) \left(b_2 b_4 + b_2 b_6 + b_2 b_8 + b_4 b_6 + b_4 b_8 + b_6 b_8 - \left(t\bar{t} + \frac{1}{t\bar{t}} \right) \right) \right) \\ \left/ \left(f \left(t\bar{t} - \frac{1}{t\bar{t}} \right) - \left(\left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_6} + \frac{1}{b_8} \right) \bar{t} - (b_2 + b_4 + b_6 + b_8) \frac{1}{\bar{t}} \right) \right) \right),$$

$$(3.33) \quad f = \left(g \left(\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7} \right) t - (b_1 + b_3 + b_5 + b_7) \frac{1}{t} \right) \right. \\ \left. - \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) \left(b_1 b_3 + b_1 b_5 + b_1 b_7 + b_3 b_5 + b_3 b_7 + b_5 b_7 - \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) \right) \right) \\ \left/ \left(g \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) - \left((b_1 + b_3 + b_5 + b_7)t - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7} \right) \frac{1}{t} \right) \right) \right)$$

となる．この式から， f を消去することで， g に関する線型方程式が得られる．

4 Additive type

Multiplicative type において, $T = e^{ct}$, $\Lambda = 1 + \epsilon\lambda$, $F = 2 + \epsilon^2 f$, $G = 2 + \epsilon^2 g$, $B_i = e^{cb_i}$ と
して, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることで, Additive type に移行する.

4.1 Painlevé equation

定理 5 (ORG[1]). $A_0^{(1)*}$ 型曲面パルヴェ方程式 (3.1), (3.2) は $T = e^{ct}$, $\Lambda = 1 + \epsilon\lambda$, $F = 2 + \epsilon^2 f$, $G = 2 + \epsilon^2 g$, $B_i = e^{cb_i}$ と置いて, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることで, 次の $A_0^{(1)**}$ 型曲面パ
ルヴェ方程式に移行する.

$$(4.1) \quad \frac{(f - \bar{g} + (2t + \lambda)^2)(f - g + 4t^2) + 4f(2t + \lambda)2t}{2t(f - \bar{g} + (2t + \lambda)^2) + (2t + \lambda)(f - g + 4t^2)} = 2 \frac{f^4 + S_2 f^3 + S_4 f^2 + S_6 f + S_8}{S_1 f^3 + S_3 f^2 + S_5 f + S_7}$$

$$(4.2) \quad \frac{(g - \underline{f} + (2t - \lambda)^2)(g - f + 4t^2) + 4g(2t - \lambda)2t}{2t(g - \underline{f} + (2t - \lambda)^2) + (2t - \lambda)(g - f + 4t^2)} = 2 \frac{g^4 + \Sigma_2 g^3 + \Sigma_4 g^2 + \Sigma_6 g + \Sigma_8}{\Sigma_1 g^3 + \Sigma_3 g^2 + \Sigma_5 g + \Sigma_7}$$

ただし, $\bar{g} = g(t + \lambda)$, $\underline{f} = f(t - \lambda)$, $\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 b_i$ であり, S_i は $c_j = b_j + t$ ($j = 1, \dots, 8$) に
関する i 次の基本対称式, Σ_i は $d_j = t - b_j$ に関する i 次の基本対称式とする. \square

この項ではこの定理の我々に方法での導出について説明する.

$A_0^{(1)**}$ 型の曲面は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の曲面を 8 回ブローアップして構成できるが, (f, g) を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
の非斉次座標として, ブローアップする 8 点の位置とそれら 8 点の満たす曲線が以下で与え
られているとする.

$$(4.3) \quad (f - g)^2 - 8t^2(f + g) + 16t^4 = 0,$$

$$p_i: ((b_i + t)^2, (t - b_i)^2) \quad (i = 1, \dots, 8).$$

このとき, 周期写像を用いたパラメータ付けとの対応は

$$(4.4) \quad \chi(\alpha_1) = -2t, \quad \chi(\alpha_2) = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) + t, \quad \chi(\alpha_i) = \frac{1}{2}(b_i - b_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7)$$

$$\chi(\alpha_8) = \frac{1}{2}(b_2 - b_1), \quad \chi(\alpha_0) = \frac{1}{2}(b_8 - b_7)$$

となる.

これらの座標およびパラメータへのアフィンワイル群 $W(E_8^{(1)}) = \langle w_i \ (i = 0, 1, \dots, 8) \rangle$ の
生成元の作用は, 以下のように記述される.

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$(4.5) \quad w_2: \left(\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{array}, t, g \right) \\ \mapsto \left(\begin{array}{cccc} b_1 - 3\frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_2 - 3\frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_3 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_4 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} \\ b_5 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_6 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_7 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} & b_8 + \frac{2t+b_1+b_2}{4} \end{array}, t - \frac{2t+b_1+b_2}{4}, \tilde{g} \right), \\ w_1: (t, f, g) \mapsto (-t, g, f), \quad w_i: (b_{i-1}, b_i) \mapsto (b_i, b_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7), \\ w_8: (b_1, b_2) \mapsto (b_2, b_1), \quad w_0: (b_7, b_8) \mapsto (b_8, b_7).$$

ただし, \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - (2t - \frac{b_1-b_2}{2})^2}{\tilde{g} - (2t - \frac{-b_1+b_2}{2})^2} = \frac{f - (b_2 + t)^2 g - (t - b_1)^2}{f - (b_1 + t)^2 g - (t - b_2)^2}$$

を満たす.

注. [14]において, $(x : y : z)$ を \mathbb{P}^2 の座標とする平面を 9 回ブローアップして, $A_0^{(1)**}$ 型の曲面を構成している

$$(4.6) \quad y^2 z = 4x^3, \\ p_i: (a_i : -2 : a_i^3) \quad (i = 1, \dots, 9), \\ \chi(\alpha_i) = (a_{i+1} - a_i)/\lambda \quad (i = 1, \dots, 7), \quad \chi(\alpha_8) = (a_1 + a_2 + a_3)/\lambda, \\ (4.7) \quad \chi(\alpha_0) = (a_9 - a_8)/\lambda, \quad \lambda = \sum_{i=1}^9 a_i.$$

上記とのパラメータ, および座標の対応は次のようになる.

$$(4.8) \quad b_1 = -\frac{3}{2}(a_1 + a_2), \quad b_i = 2a_{i+1} + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \quad (i = 2, \dots, 8), \quad t = \frac{1}{2}(a_1 - a_2),$$

$$(4.9) \quad f = \frac{-6a_1^2 x + a_1^3 y + 8z}{2x + a_1 y},$$

$$(4.10) \quad g = \frac{-6a_2^2 x + a_2^3 y + 8z}{2x + a_2 y}.$$

ここで表記の便宜のために次のパラメータを導入する.

$$c_i = b_i + t \quad (i = 1, \dots, 8).$$

新しいパラメータ c_i へのアフィンワイル群の生成元の作用は, 以下のようになる.

$W(E_8^{(1)})$ -symmetry

$$\begin{aligned}
 w_2 &: (c_1, c_2, t, g) \mapsto (-c_2, -c_1, t - \frac{c_1+c_2}{4}, \tilde{g}), \\
 w_1 &: (c_i, t, f, g) \mapsto (c_i - 2t, -t, g, f) \quad (i = 1, \dots, 8), \\
 w_i &: (c_{i-1}, c_i) \mapsto (c_i, c_{i-1}) \quad (i = 3, \dots, 7), \\
 w_8 &: (c_1, c_2) \mapsto (c_2, c_1), \quad w_0: (c_7, c_8) \mapsto (c_8, c_7).
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

ここで \tilde{g} は

$$\frac{\tilde{g} - (2t - \frac{c_1-c_2}{2})^2}{\tilde{g} - (2t - \frac{-c_1+c_2}{2})^2} = \frac{f - c_2^2 g - (2t - c_1)^2}{f - c_1^2 g - (2t - c_2)^2}$$

を満たすが, G, \tilde{G} を

$$G = \frac{f - g + 4t^2}{4t}, \quad \tilde{G} = \frac{f - \tilde{g} + (2t - \frac{c_1+c_2}{2})^2}{4t - c_1 - c_2},$$

と置くと, この作用は G の一次分数変換を用いて

$$\tilde{G} = \frac{(f + c_1 c_2)G - (c_1 + c_2)f}{-(c_1 + c_2)G + (f + c_1 c_2)}.
 \tag{4.12}$$

と記述できる. よって変換は PGL の作用

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} f + c_1 c_2 & -(c_1 + c_2)f \\ -(c_1 + c_2) & f + c_1 c_2 \end{pmatrix} G
 \tag{4.13}$$

で表わせる.

$W(E_8^{(1)})$ の平行移動を一つ選ぶことで, 非線形の差分方程式が得られる.

$A_0^{(1)**}$ -surface P

$$\begin{aligned}
 &= w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ \\
 &\circ w_2 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_8 \circ w_0 \circ w_7 \circ w_6 \circ w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1 \circ \\
 &\circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_0 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_7 \circ w_2 \circ w_3 \circ \\
 &\circ w_4 \circ w_5 \circ w_6 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_8 \circ w_3 \circ w_2 :
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

$$(b_i, t, f, g) \mapsto (b_i, t + \lambda, \bar{f}, \bar{g}) \quad (i = 1, \dots, 8), \quad \lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 b_i.
 \tag{4.15}$$

ここで, \bar{g} は G, \mathcal{G} を

$$G = \frac{f - g + 4t^2}{4t}, \quad \mathcal{G} = \frac{f - \bar{g} + (2t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 c_i)^2}{4t - \sum_{i=1}^8 c_i} = \frac{f - \bar{g} + (2t + \lambda)^2}{-4t - 2\lambda}$$

と置くことで，以下のように記述できる．

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \begin{pmatrix} f + c_7c_8 & -(c_7 + c_8)f \\ -(c_7 + c_8) & f + c_7c_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + c_5c_6 & -(c_5 + c_6)f \\ -(c_5 + c_6) & f + c_5c_6 \end{pmatrix} \\
 (4.16) \quad &\cdot \begin{pmatrix} f + c_3c_4 & -(c_3 + c_4)f \\ -(c_3 + c_4) & f + c_3c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + c_1c_2 & -(c_1 + c_2)f \\ -(c_1 + c_2) & f + c_1c_2 \end{pmatrix} G \\
 &= \begin{pmatrix} f^4 + S_2f^3 + S_4f^2 + S_6f + S_8 & -(S_1f^3 + S_3f^2 + S_5f + S_7)f \\ -(S_1f^3 + S_3f^2 + S_5f + S_7) & f^4 + S_2f^3 + S_4f^2 + S_6f + S_8 \end{pmatrix} G
 \end{aligned}$$

ここで S_i は c_j に関する i 次の基本対称式である．この式は

$$(4.17) \quad \frac{\mathcal{G}G - f}{G - \mathcal{G}} = \frac{f^4 + S_2f^3 + S_4f^2 + S_6f + S_8}{S_1f^3 + S_3f^2 + S_5f + S_7}$$

とまとめられるので，故に g の時間発展を記述する方程式は (4.1) となる．

同様に， \underline{f} についても F, \mathcal{F} を

$$F = \frac{g - \underline{f} + 4t^2}{-4t}, \quad \mathcal{F} = \frac{g - \underline{f} + (-2t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 d_i)^2}{-4t + \sum_{i=1}^8 d_i} = \frac{g - \underline{f} + (2t - \lambda)^2}{4t - 2\lambda}$$

と置くことで，以下のように記述できる．

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} g + d_7d_8 & (d_7 + d_8)g \\ d_7 + d_8 & g + d_7d_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g + d_5d_6 & (d_5 + d_6)g \\ d_5 + d_6 & g + d_5d_6 \end{pmatrix} \\
 (4.18) \quad &\cdot \begin{pmatrix} g + d_3d_4 & (d_3 + d_4)g \\ d_3 + d_4 & g + d_3d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g + d_1d_2 & (d_1 + d_2)g \\ d_1 + d_2 & g + d_1d_2 \end{pmatrix} F \\
 &= \begin{pmatrix} g^4 + S_2g^3 + \Sigma_4g^2 + \Sigma_6g + \Sigma_8 & (\Sigma_1g^3 + \Sigma_3g^2 + \Sigma_5g + \Sigma_7)g \\ \Sigma_1g^3 + \Sigma_3g^2 + \Sigma_5g + \Sigma_7 & g^4 + \Sigma_2g^3 + \Sigma_4g^2 + \Sigma_6g + \Sigma_8 \end{pmatrix} F.
 \end{aligned}$$

ここで $d_i = t - b_i$ ($i = 1, \dots, 8$) であり， Σ_i は d_j に関する i 次の基本対称式である．この式は

$$(4.19) \quad \frac{\mathcal{F}F - g}{F - \mathcal{F}} = \frac{g^4 + \Sigma_2g^3 + \Sigma_4g^2 + \Sigma_6g + \Sigma_8}{\Sigma_1g^3 + \Sigma_3g^2 + \Sigma_5g + \Sigma_7}$$

とまとめられるので，故に f の時間発展を記述する方程式は (4.2) となる．

これらは太田ら [1] の導出した方程式と一致する．

4.2 Hypergeometric equation

定理 6. $A_0^{(1)*}$ 型曲面パルヴェ方程式においてパラメータが $B_1 B_3 B_5 B_7 = 1$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系 (3.24), (3.25) は $T = e^{ct}$, $\Lambda = 1 + \epsilon\lambda$, $F = 2 + \epsilon^2 f$, $G = 2 + \epsilon^2 g$, $B_i = e^{cb_i}$ と置いて, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることで, 次の $A_0^{(1)**}$ 型曲面パルヴェ方程式 (4.1), (4.2) においてパラメータが $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系に移行する.

$$(4.20) \quad \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ (b_1 + t)^2(t - b_1)^2 & (t - b_1)^2 & (b_1 + t)^2 & 1 \\ (b_3 + t)^2(t - b_3)^2 & (t - b_3)^2 & (b_3 + t)^2 & 1 \\ (b_5 + t)^2(t - b_5)^2 & (t - b_5)^2 & (b_5 + t)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4.21) \quad \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ (b_8 + t)^2(\bar{t} - b_8)^2 & (\bar{t} - b_8)^2 & (b_8 + t)^2 & 1 \\ (b_6 + t)^2(\bar{t} - b_6)^2 & (\bar{t} - b_6)^2 & (b_6 + t)^2 & 1 \\ (b_4 + t)^2(\bar{t} - b_4)^2 & (\bar{t} - b_4)^2 & (b_4 + t)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ただし, $\bar{t} = t + \lambda$ である. □

この項ではこの定理の導出について説明する.

パラメータが $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ のときの特殊解を考察する.

このとき次の曲線 I を考える.

$$(4.22) \quad I = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ (b_1 + t)^2(t - b_1)^2 & (t - b_1)^2 & (b_1 + t)^2 & 1 \\ (b_3 + t)^2(t - b_3)^2 & (t - b_3)^2 & (b_3 + t)^2 & 1 \\ (b_5 + t)^2(t - b_5)^2 & (t - b_5)^2 & (b_5 + t)^2 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ c_1^2(2t - c_1)^2 & (2t - c_1)^2 & c_1^2 & 1 \\ c_3^2(2t - c_3)^2 & (2t - c_3)^2 & c_3^2 & 1 \\ c_5^2(2t - c_5)^2 & (2t - c_5)^2 & c_5^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

この曲線 I への w_2 の作用を計算すると次のようになる .

$$\begin{aligned}
(4.23) \quad \tilde{I} &= \begin{vmatrix} f\tilde{g} & \tilde{g} & f & 1 \\ c_2^2(2\tilde{t} + c_2)^2 & (2\tilde{t} + c_2)^2 & c_2^2 & 1 \\ c_3^2(2\tilde{t} - c_3)^2 & (2\tilde{t} - c_3)^2 & c_3^2 & 1 \\ c_5^2(2\tilde{t} - c_5)^2 & (2\tilde{t} - c_5)^2 & c_5^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= I (f - c_2^2)(c_2^2 - c_3^2)(c_2^2 - c_5^2) \\
&\quad \cdot ((2t - c_1)^2 - (2t - c_2)^2)((2\tilde{t} + c_2)^2 - (2\tilde{t} + c_1)^2)^2 \\
&\quad \cdot \left(\begin{vmatrix} f & g & 1 \\ c_1^2 & (2t - c_1)^2 & 1 \\ c_2^2 & (2t - c_2)^2 & 1 \\ c_3^2 & (2t - c_3)^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1^2 & (2t - c_1)^2 & 1 \\ c_2^2 & (2t - c_2)^2 & 1 \\ c_3^2 & (2t - c_3)^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1^2 & (2t - c_1)^2 & 1 \\ c_2^2 & (2t - c_2)^2 & 1 \\ c_5^2 & (2t - c_5)^2 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

ゆえに $I = 0 \implies \tilde{I} = 0$ が成り立つ . このようなワイル群の作用を合成することで ,

$$(4.24) \quad \mathcal{I} = \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ (b_8 + t)^2(\bar{t} - b_8)^2 & (\bar{t} - b_8)^2 & (b_8 + t)^2 & 1 \\ (b_6 + t)^2(\bar{t} - b_6)^2 & (\bar{t} - b_6)^2 & (b_6 + t)^2 & 1 \\ (b_4 + t)^2(\bar{t} - b_4)^2 & (\bar{t} - b_4)^2 & (b_4 + t)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

について $I = 0 \implies \mathcal{I} = 0$ が成り立ち , 結局 ,

$$(4.25) \quad \bar{I} = \begin{vmatrix} \bar{f}\bar{g} & \bar{g} & \bar{f} & 1 \\ (b_1 + \bar{t})^2(\bar{t} - b_1)^2 & (\bar{t} - b_1)^2 & (b_1 + \bar{t})^2 & 1 \\ (b_3 + \bar{t})^2(\bar{t} - b_3)^2 & (\bar{t} - b_3)^2 & (b_3 + \bar{t})^2 & 1 \\ (b_5 + \bar{t})^2(\bar{t} - b_5)^2 & (\bar{t} - b_5)^2 & (b_5 + \bar{t})^2 & 1 \end{vmatrix}$$

について , $I = 0 \implies \bar{I} = 0$ を得る . このことは , $I = 0$ を満たす f, g が $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$ のときの特解となることを意味する .

ゆえに , 特殊解 f, g について (4.20), (4.21) が成り立つ .

この行列式を展開した式は

$$\begin{aligned}
(4.26) \quad &4fgt \\
&+ f ((b_1 + b_3)(b_1 + b_5)(b_3 + b_5) + 2(b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t + 4t^3) \\
&- g ((b_1 + b_3)(b_1 + b_5)(b_3 + b_5) - 2(b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t - 4t^3) \\
&- 4t (-b_1b_3b_5b_7 + (b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t^2 + 3t^4) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.27) \quad & 16f\bar{g}(t+\bar{t}) \\
& + 8f((b_2+b_4)(b_2+b_6)(b_4+b_6) + 2(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)t + 4t^3) \\
& - 8\bar{g}((b_2+b_4)(b_2+b_6)(b_4+b_6) - 2(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)\bar{t} - 4\bar{t}^3) \\
& - (t+\bar{t})(-16b_2b_4b_6b_8 + 4(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)(t+\bar{t})^2 + 3(t+\bar{t})^4) = 0
\end{aligned}$$

となる．この式を解き直すと，

$$\begin{aligned}
(4.28) \quad & \bar{g} = \left(-8f((b_2+b_4)(b_2+b_6)(b_4+b_6) + 2(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)t + 4t^3) \right. \\
& \left. + (t+\bar{t})(-16b_2b_4b_6b_8 + 4(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)(t+\bar{t})^2 + 3(t+\bar{t})^4) \right) \\
& \left/ \left(16f(t+\bar{t}) - 8((b_2+b_4)(b_2+b_6)(b_4+b_6) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(b_2b_4 + b_2b_6 + b_2b_8 + b_4b_6 + b_4b_8 + b_6b_8)\bar{t} - 4\bar{t}^3) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.29) \quad & f = \left(g((b_1+b_3)(b_1+b_5)(b_3+b_5) - 2(b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t - 4t^3) \right. \\
& \left. + 4t(-b_1b_3b_5b_7 + (b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t^2 + 3t^4) \right) \\
& \left/ (4gt + ((b_1+b_3)(b_1+b_5)(b_3+b_5) + 2(b_1b_3 + b_1b_5 + b_1b_7 + b_3b_5 + b_3b_7 + b_5b_7)t + 4t^3)) \right)
\end{aligned}$$

となる．この式から， f を消去することで， g に関する線型方程式が得られる．

5 $A_1^{(1)}$ -surface hypergeometric equation

Multiplicative type において $t = T^2$, $\lambda = \Lambda^2$, $F = \Omega f p^{1/4}/T$, $G = \Omega g T p^{1/4}/g$, $B_i = \Omega b_i p^{1/4}$ ($i = 1, \dots, 4$), $B_i = p^{1/4}/(\Omega b_i)$ ($i = 5, \dots, 8$), $p = \sqrt{b_1 b_2 b_3 b_4 / (b_5 b_6 b_7 b_8)}$ として, $\Omega \rightarrow \infty$ の極限をとることで, $A_1^{(1)}$ 型に移行する.

定理 7. $A_0^{(1)*}$ 型曲面パンルヴェ方程式においてパラメータが $B_1 B_3 B_5 B_7 = 1$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系 (3.24), (3.25) は, $p = \sqrt{b_1 b_2 b_3 b_4 / (b_5 b_6 b_7 b_8)}$, $t = T^2$, $\lambda = \Lambda^2$, $F = \Omega f p^{1/4}/T$, $G = \Omega g T p^{1/4}/g$, $B_i = \Omega b_i p^{1/4}$ ($i = 1, \dots, 4$), $B_i = p^{1/4}/(\Omega b_i)$ ($i = 5, \dots, 8$) として, $\Omega \rightarrow \infty$ の極限をとることで, 次の $A_1^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式においてパラメータが $b_5 b_7 = b_1 b_3 p$ という条件の下での特殊関数解が満たす線型方程式系に移行する.

$$(5.1) \quad \begin{vmatrix} fg & g & f & 1 \\ t^2 & t/b_1 & b_1 t & 1 \\ t^2 & t/b_3 & b_3 t & 1 \\ 1 & 1/b_5 & b_5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} f\bar{g} & \bar{g} & f & 1 \\ 1 & 1/b_8 & b_8 & 1 \\ 1 & 1/b_6 & b_6 & 1 \\ t\bar{t} & \bar{t}/b_4 & b_4 t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ただし, $\bar{t} = t\lambda$ である. □

この項ではこの定理の導出について説明する.

$A_0^{(1)*}$ 型の曲面は上述の極限操作で $A_1^{(1)}$ 型の曲面に移行するが, (f, g) を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非斉次座標とすると, ブローアップする 8 点の位置とそれら 8 点の満たす曲線は以下ようになる.

$$(5.3) \quad (fg - t^2)(fg - 1) = 0,$$

$$p_i: \left(b_i t, \frac{t}{b_i} \right) \quad (i = 1, \dots, 4), \quad p_i: \left(b_i, \frac{1}{b_i} \right) \quad (i = 5, \dots, 8).$$

また, その極限操作を $A_0^{(1)*}$ 型曲面パンルヴェ方程式 (3.1), (3.2) に施すことで $A_1^{(1)}$ 型曲面パンルヴェ方程式が導出される [1].

$$(5.4) \quad \frac{(f\bar{g} - t\bar{t})(fg - t^2)}{(f\bar{g} - 1)(fg - 1)} = \frac{(f - b_1 t)(f - b_2 t)(f - b_3 t)(f - b_4 t)}{(f - b_5)(f - b_6)(f - b_7)(f - b_8)},$$

$$(5.5) \quad \frac{(fg - t^2)(f\bar{g} - t\bar{t})}{(fg - 1)(f\bar{g} - 1)} = \frac{(g - t/b_1)(g - t/b_2)(g - t/b_3)(g - t/b_4)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_6)(g - 1/b_7)(g - 1/b_8)}.$$

それと同様の極限操作を線型方程式 (3.24), (3.25) において施すことで, パラメータが $b_5 b_7 = b_1 b_3 p$ という条件の下, $A_1^{(1)}$ 型曲面パウルヴェ方程式の特殊解の満たす線型方程式系 (5.1), (5.2), または, \bar{g}, f について解き直した式

$$(5.6) \quad \bar{g} = \frac{f(1 - t\bar{t}) + t(\bar{t}(b_6 + b_8) - b_2 - b_4)}{g(b_6 + b_8 - t(b_2 + b_4)) + b_6 b_8 (t\bar{t} - 1)},$$

$$(5.7) \quad f = \frac{g b_5 b_7 (t^2 - 1) + t(b_1 + b_3 - t(b_5 + b_7))}{g(t(b_1 + b_3) - b_5 - b_7) + 1 - t^2}$$

に移行する. この式は, Ramani et al.[2] の結果と一致する.

付録 A Parameterization

対象とする曲面はを $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 曲面への双有理射をもち, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 曲面の 8 回ブローアップとして実現できる. よって, これらの曲面の同型類は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 曲面の 8 点で決定される.

これとは別に, 周期写像を用いたパラメータ付けの方法がある. この有理曲面には正則 2-形式が存在しないので, その代わりに有理 2-形式 ω をとり, これと曲面からこの 2-形式の極因子 D_{red} を除いたコンパクトでない曲面の 2 次のホモロジー $H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z})$ の元との組でパラメータ付けを行うものである.

$$(A.1) \quad \hat{\chi}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \omega, \quad \Gamma \in H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z}).$$

ここで $H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z})$ は次の分解をもつ.

$$(A.2) \quad 0 \rightarrow H_1(D_{red}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z}) \rightarrow Q(R^\perp) \rightarrow 0,$$

ただし, $Q(R^\perp)$ は R^\perp 型のルート系のルート格子で, $Q(R)$ に直交する格子を表わす. よって周期写像を通して次の写像が構成できる.

$$(A.3) \quad \chi: Q(R^\perp) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mod } \hat{\chi}(H_1(D_{red}, \mathbb{Z})).$$

したがって, ルート系 R^\perp の定める値でパラメータ付けを行うことができる.

この論文では, ルート系 $A_0^{(1)\perp} = E_8^{(1)}$ の基底を

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0, & \alpha_2 &= \mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, & \alpha_i &= \mathcal{E}_{i-1} - \mathcal{E}_i \quad (i = 3, \dots, 7), \\ \alpha_8 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, & \alpha_0 &= \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8 \end{aligned}$$

としている. ただし, $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 曲面上の直線の $A_0^{(1)}$ 型曲面への引き戻しのなす線形同値類, \mathcal{E}_i は p_i に対応した例外曲線の線形同値類である.

参考文献

- [1] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos, An affine Weyl group approach to the 8-parameter discrete Painlevé equation, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** (2001), 10523–10532.
- [2] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani and K. M. Tamizhmani, Special function solutions of the discrete Painlevé equations, *Comput. Math. Appl.* **42** (2001), no.3-5, 603–614.

- [3] B. Grammaticos and A. Ramani, On a novel q -discrete analogue of the Painlevé VI equation, *Phys. Lett. A* **257** (1999), no.5-6, 288–292.
- [4] B. Grammaticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou, Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1825–1828.
- [5] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani and H. Sakai, Degeneration through coalescence of the q -Painlevé VI equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998), 3545–3558.
- [6] M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, *Physica* **2D** (1981), 407–448.
- [7] M. Jimbo and H. Sakai, A q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.
- [8] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed., *Cambridge University Press* (1990).
- [9] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), no.2, 281–295.
- [10] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équation du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, *Japan. J. Math.* **5** (1979), 1–79.
- [11] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations I. *Annali di Matematica pura ed applicata* **CXLVI** (1987), 337–381; II. *Jap. J. Math.* **13** (1987), 47–76; III. *Math. Ann.* **275** (1986), 221–255; IV. *Funkcial. Ekvac. Ser. Int.* **30** (1987), 305–332.
- [12] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme, *Oeuvre t.* **III**, 187–271.
- [13] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1829–1832.
- [14] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.
- [15] 米田仁, 村田実貴生, 坂井秀隆, 楯円差分 Painlevé 方程式と楯円超幾何方程式, 日本数学会年会無限可積分系セッション講演アブストラクト (2001), 37–38.