【演習問題】

ミーゼスの降伏条件式に従う等方性の金属板がある．単軸引張試験によって測定された真応力－対数塑性ひずみ曲線が$\sigma_1 = 311\times(0.01+\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^{0.2}$（MPa）で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし金属板は剛塑性体で平面応力状態（$\sigma_3 = 0$）にあると仮定する．

（１）この材料に等二軸引張変形（$\sigma_1 = \sigma_2$）を加えた．$\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = \varepsilon_2^{\mathrm{p}} = 0.05$に達したとき，材料に加えられた相当塑性ひずみ$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$を求めよ．

（２）（１）における相当応力$\bar{\sigma}$を求めよ．

（３）（１）において，材料に作用する真応力σ_1およびσ_2を求めよ．

（４）（１）の状態から，$\Delta\sigma_1 = 2\,\mathrm{MPa}$，$\Delta\sigma_2 = 1\mathrm{MPa}$ の応力増分を加えた．このときの材料の相当応力$\bar{\sigma}$と相当塑性ひずみ$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$を求めよ．

（５）（４）において，（１）の状態からの相当応力増分$\Delta\bar{\sigma}$，相当塑性ひずみ増分$\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，主ひずみ増分$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}, \Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}}, \Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}}$ を求めよ．

【解答】

（１）$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \varepsilon_1^{\mathrm{p}} + \varepsilon_2^{\mathrm{p}} = 0.1$

（２）$\bar{\sigma} = 311(0.01+0.1)^{0.2} = 200.00\mathrm{MPa}$

（３）$\sigma_1 = \sigma_2 = 200.00\mathrm{MPa}$

（４）$\Delta\sigma_1 = 2\,\mathrm{MPa}$，$\Delta\sigma_2 = 1\mathrm{MPa}$ の応力増分後には

$\sigma_1 = 202.00\mathrm{MPa}$，$\sigma_2 = 201.00\mathrm{MPa}$ となるから，

$$\bar{\sigma} = \sqrt{202\times202-202\times201+201\times201} \approx 201.50\mathrm{MPa}$$

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = (201.50/311)^5 - 0.01 = 0.10418$$

【解答】

（５） $\Delta\bar{\sigma}=201.50\text{-}200=1.50\text{MPa}$

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=0.10418-0.10000=0.00418$$

Levy-Mises の式より， $\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}=\sigma_1' d\lambda$ および $\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}}=\sigma_2' d\lambda$． ここで

$$\sigma_1'=\sigma_2'=200-\frac{200+200+0}{3}=66.67\,\text{MPa}$$

$$d\lambda=\frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}}=\frac{3}{2}\times\frac{0.00418}{200.00}=3.14\times10^{-5}\,\text{MPa}^{-1}$$

であるので，

$$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}=\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}}=66.67\times3.14\times10^{-5}=2.09\times10^{-3}$$

$$\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}}=-(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}+\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}})=-4.18\times10^{-3}$$

【参考】　材料をヤング率 $E=200\text{GPa}$ の弾塑性体と仮定した場合

弾性ひずみ増分は次式より計算できる.

$$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{E}\{\Delta\sigma_1-\nu(\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3)\}$$

$$=\frac{2-0.3\times1\,(\text{MPa})}{200\times10^3\,(\text{MPa})}=8.5\times10^{-6}$$

$$\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{e}}=\frac{1}{E}\{\Delta\sigma_2-\nu(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_3)\}$$

$$=\frac{1-0.3\times2\,(\text{MPa})}{200\times10^3\,(\text{MPa})}=2.0\times10^{-6}$$

$$\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{e}}=\frac{1}{E}\{\Delta\sigma_3-\nu(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2)\}$$

$$=\frac{0-0.3\times3\,(\text{MPa})}{200\times10^3\,(\text{MPa})}=-4.5\times10^{-6}$$

【演習問題２】

金属薄板に$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = \Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}} = 0.1$の等２軸引張変形を加えた後，さらにそこから引張試験片を切り出して，$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = 0.1$の単軸引張変形を加えた．この金属薄板に加えられた，相当塑性ひずみの総和$\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$を求めよ．

【解答】

等二軸引張変形では，$\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}} = -\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} - \Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}} = -2\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$であるから，相当塑性ひずみ増分は次式より計算できる．

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}})^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (-2\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2} \\
&= 2\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = -\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}}
\end{aligned}
$$

よって，等二軸引張変形における相当塑性ひずみ増分は，$\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 0.2$ ．

単軸引張変形における相当塑性ひずみ増分は，$\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = 0.1$ ．

以上より，この金属薄板に加えられた，相当塑性ひずみの総和は，

$$\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

【演習問題】

単軸引張変形における応力－ひずみ曲線が $\sigma_1 = 500(0.01 + \varepsilon_1^{\mathrm{p}})^{0.1}$ (MPa) で与えられる板材がある.

$\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = \Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}} = 0.2$ の等二軸引張変形を加えるために必要な面内応力 σ_{b} を求めよ.

【解答】　等二軸引張変形では,

$$\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2 + (-2\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2}$$

$$= 2\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}} = -\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}}$$

よって，本問題における相当塑性ひずみ増分は

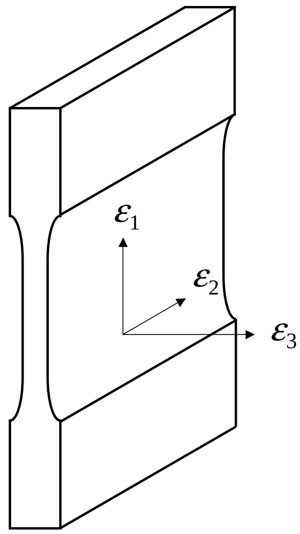
$\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 0.4$．これに対応する相当応力（降伏応力）は,

$$\sigma_1 = 500(0.01 + 0.4)^{0.1} = \quad 457.3 \qquad \text{(MPa)}$$

$$\therefore \sigma_{\mathrm{b}} = \sigma_1 = \qquad 457.3 \quad \text{(MPa)}$$

【演習問題】

右図に示す広幅の試験片を用いて板幅不変の平面ひずみ引張試験を行った．引張方向を１軸，試験片の幅方向を２軸板厚方向を３軸とするとき，相当応力$\bar{\sigma}$をσ_1の関数として相当塑性ひずみ$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$を$\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$の関数として表記せよ．

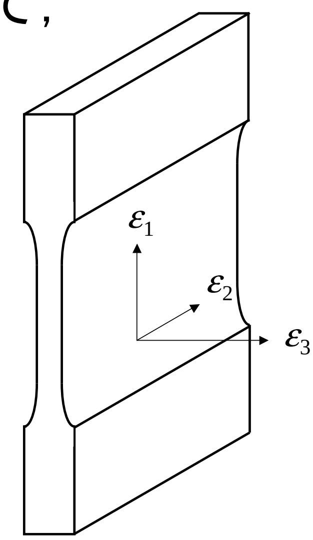


【解答】　平面ひずみ引張では$d\varepsilon_2^{\mathrm{p}}=0$　よって，

$$\overline{\Delta\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2+(\Delta\varepsilon_2^{\mathrm{p}})^2+(\Delta\varepsilon_3^{\mathrm{p}})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{(\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2+0^2+(-\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}})^2}\quad .$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$$



Levy-Mises の式より$\sigma_2'=0$．よって$\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$．

$\sigma_3=0$を考慮すると，

$$\bar{\sigma}\equiv\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1$$