5次元球面上の Lawson 葉層上の葉向 Symplectic 構造について

三松　佳彦（中大. 理工）

Lawson 葉層とは…… (H. B. Lawson, Annals of Math. (1971))

- 小平葉層, 田村先生, A. Durfee … Thurston の h-原理.
  A'Campo,

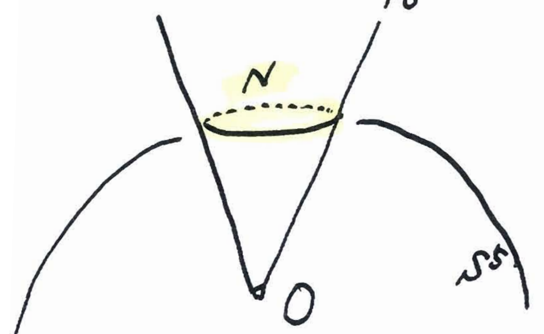
構成

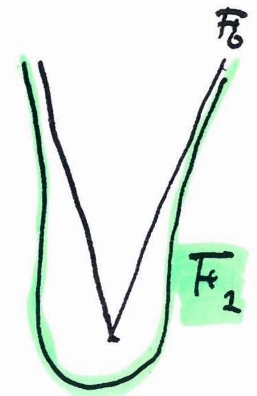
$$f(z_0, z_1, z_2) = z_0^3 + z_1^3 + z_2^3$$

一言で言うと… $S^5 \setminus N$ の Milnor fibration と Link N の tub. nbd. を各 turbulize. 境界の compact 葉 $= K^4$: 小平-Thurston nil-mfd.

$\check{F}_0 = F_0 \setminus \{0\}$, $F_w = f^{-1}(w)$: 非特異 $(w \neq 0)$, $N = \check{F}_0 \cap S^5$

注. scalar 倍 $c \cdot$: $F_w \longleftrightarrow F_{c^3 w}$: 双正則.

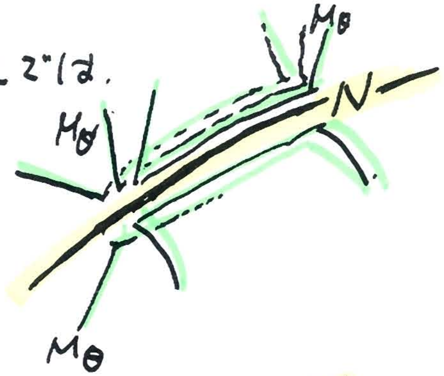




$$\begin{array}{ccc} S^5 \setminus N & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \cup & \searrow & \downarrow \arg \\ M_\theta & & S^1 \ni \theta \end{array}$$

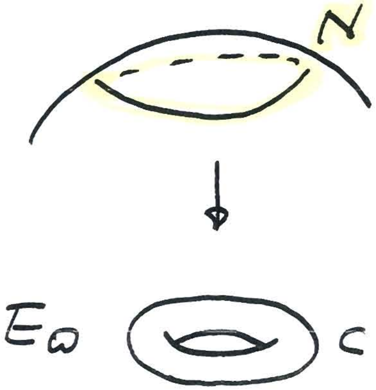
Milnor fibration

S^5 上では.



$N^3 \hookrightarrow S^5$ 法束は 自明.

$N \subset W \subset S^5$ $\quad f: W \longrightarrow D^2_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ $\quad W \cong N \times D^2_\varepsilon$.



S^5
$\downarrow h$
E_ω $\subset \mathbb{C}P^2$

$h: S^5 \to \mathbb{C}P^2$: Hopf fibration.

$h|N : N \longrightarrow E_\omega =$ 楕円曲線. $\left(\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$S^1 \hookrightarrow N$
$\downarrow (-3)$
$E_\omega \cong S^1 \times S^1 \ni (x, y)$

: $U(1)$-束. $c_1 = -3$.

$N \subset W \quad \subset S^5$
$(-3) \downarrow$
$E_\omega \subset U \quad \subset \mathbb{C}P^2$
$(q.)$

$\partial W = S^1 \times N = K^4$:

$W = D^2 \times N$: $p_N^{-1}(\mathcal{F}_R)$.
$\downarrow p_N$
$D^2 \times S^1$

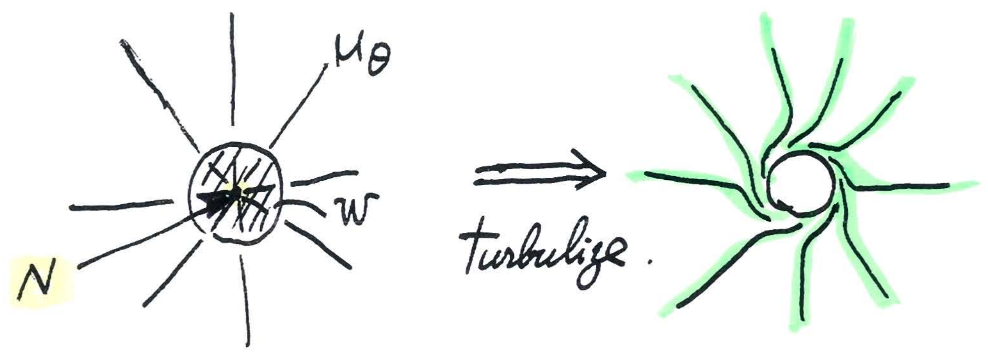
tube component

Reeb Comp. $\mathcal{F}_R$

$S^1 \hookrightarrow N$
$\downarrow$
E_ω
$\downarrow$
S^1_x

:

$T^2 \hookrightarrow N$
$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
S^1_x



$C = S^5 \setminus W$ = Fermat cubic component.

Lawson's Lemma

$(F, \partial F) \hookrightarrow (M, \partial M)$

$\downarrow \pi$: C^∞ fibration.

S^1

$\Rightarrow$ $\{\pi^{-1}(\theta)\}$ による葉層（束葉層）を turbulize して ∂M を compact 葉とする C^∞ 余次元1葉層に改変出来る。

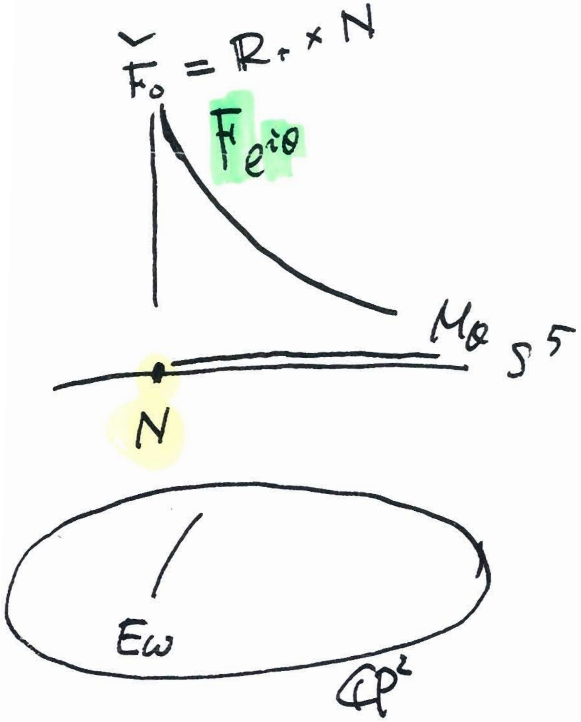
compact 葉以外の葉は $\mathrm{Int}\,F$ に微分同相.

$(S^5, \mathcal{L})$: Lawson 葉層.

Verjovsky の問題

: Lawson 葉層，又は 他の S^5 上の余次元 1 葉層に，葉向 (leafwise) 複素構造，symplectic 構造は存在するか？

(注) 境界葉 K (= 小平・Thurston) は non-Kähler！



$F_{w\neq0}$

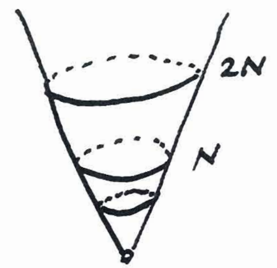
↓ diffeo.

$M_{\theta=\arg w}$

↓ 3重被覆.

$\mathbb{CP}^2 \setminus E_\omega$

	Tube Comp.	Fermat cubic Comp.
複素	×	○ non trivial
symplectic	○ easy	○ cf talk



$K = \check{F}_0 /$ 相似拡大

: 複素構造.

tube component と 小平-Thurston の Symplectic 構造

$S^1 \hookrightarrow S^5 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^2$: Hopf fibration

$\zeta :=$ 標準的 S^1-接続形式.

$S^1 \hookrightarrow N \to E_\omega$ (x, y) $\quad \zeta|_N = \zeta_N.$

$d\zeta_N = \frac{3}{2\pi} dx \wedge dy.$

$\mathbb{C}^3$ の標準的 symplectic form $\beta^* = 2 \sum_{j=0}^{2} dx_j \wedge dy_j$

—— " —— Liouville form $\lambda^* = \sum_{j=0}^{2} (x_j dy_j - y_j dx_j) = \rho^2 \zeta$ $\quad d\lambda^* = \beta^*$

(ρ: 極座標)

$K = \partial D^2 \times N = S^1 \times N$

$\left[\begin{array}{c} T^2 \hookrightarrow N \\ dy \wedge \zeta_N \quad \downarrow \\ S^1 \quad dx \end{array} \right] \times S^1$ ($d\theta$)

$$\beta_{K,\lambda,\mu} = \lambda\, d\theta \wedge dx + \mu\, dy \wedge \zeta_N$$

$(\lambda, \mu \neq 0)$

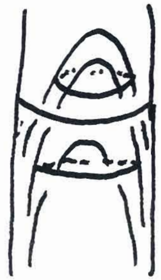
$W = D^2 \times N$

$T^2 \hookrightarrow D^2 \times N \supset S^1 \times N$

$\downarrow$

$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1$

$\exists \beta_{W,\lambda,\mu} \mapsto \beta_{K,\lambda,\mu}$



Reeb component

$(D^2 \times S^1, \mathcal{F}_R)$

$\exists \beta_R, \quad \beta_R|_{\partial(D^2 \times S^1)} = d\theta \wedge dx$

小平-Thurston 巾零多様体

① $K = \partial(D^2 \times N) = \partial W.$ (θ, x, y, z) ② $K = \check{F}_0/\sim = \mathbb{R}_+ \times N/\sim \cong \mathbb{R} \times N/\sim$ $([\rho], x.y.z)$ $(\tau, x.y.z)$

$\check{F}_0$ 上 $\lambda^*|_{\check{F}_0} = \rho^2 \cdot \zeta_N$ なので. $\tau = \log \rho^2$ と座標変換すると.

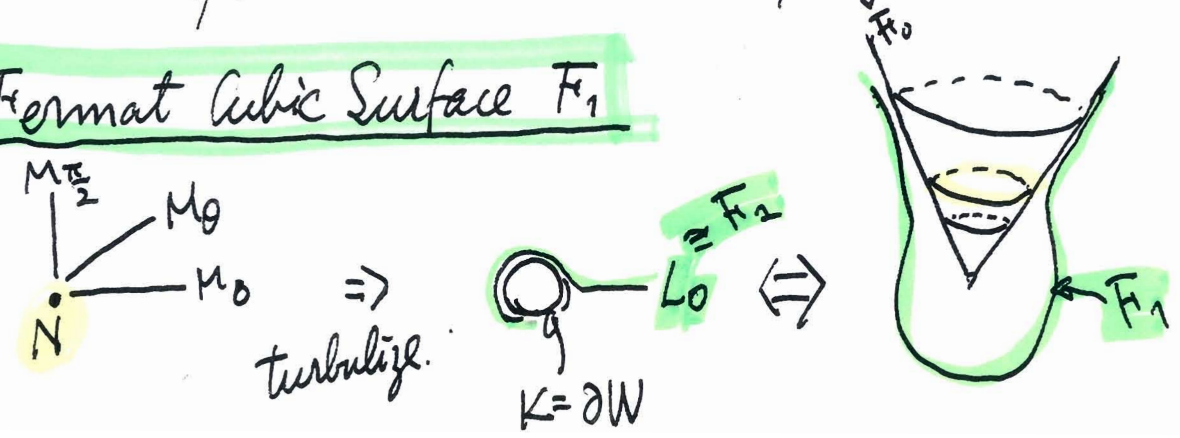
$\lambda^*|_{\check{F}_0} = e^\tau \cdot \zeta_N$, $\check{F} \cong \mathbb{R} \times N$, $\beta^*|_{\check{F}} = d(e^\tau \cdot \zeta_N)$: (N, ζ_N) の symplectization.

$$\beta^*|_{\check{F}_0} = d(e^\tau \cdot \zeta_N) = e^\tau d\tau \wedge \zeta_N + e^\tau \frac{3}{2\pi} dx \wedge dy.$$

まるで違う!

$$\beta_{K,\lambda,\mu} = \lambda \cdot d\tau \wedge dx + \mu\, dy \wedge \zeta_N$$

Fermat Cubic Surface F_1



F_1 の end $\cong F_0$ の end $\cong \mathbb{R}_+ \times N$

ここに $\beta_{K,\lambda,\mu}$ の様な symplectic form が必要!!

定理 $0 < \mu \ll 1 \ll \lambda$, $\exists \beta_{\lambda,\mu}$: symplectic form on F_1.
s.t. $\beta_{\lambda,\mu}\big|_{F_1 \text{の} end} = \lambda\, d\tau \wedge dx + \mu\, dy \wedge \xi_N$

系 Lawson 葉層 $\mathcal{L}$ は 葉向 symplectic 構造を許容する。

系 5次元球面 S^5 は正則 Poisson 構造であって、その symplectic 葉層が Lawson 葉層と一致するものを許容する。

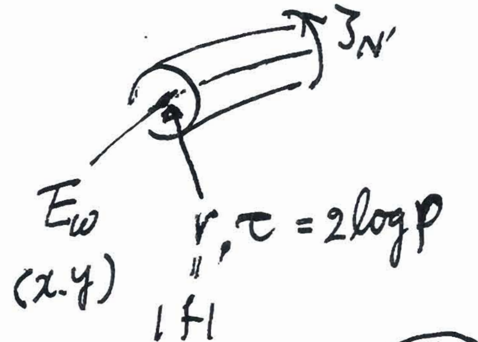
準備 (凸 symplectic 構造の安定性)

補題 Fermat 3次曲面 F_1 は end で $d(e^{\tau}\cdot \xi_N)$ となる symplectic form を許容する。
即ち、F_0 の end と同型の symplectic 構造が存在する。

補題 (3変形) $\beta^*|_{F_1}$ と $\beta^*|_{F_0}$ は end において symplectomorphic.

F_1 の end-periodic symplectic form $\beta_{\lambda\mu}$ の構成

$\mathbb{C}^3, S^5$ ではなく, $\mathbb{C}P^2$ で考える. $\mathbb{C}P^2 \setminus E_\omega = F_1 / \mathbb{Z}/3$, end $= \mathbb{R}_+ \times Nil^3(-9)$



種 $\mathbb{C}P^2 \setminus E_\omega$ 上に End で $dy \wedge \zeta_N$ となる閉2形式が存在. ← κ

Meyer-Vietoris for $\mathbb{C}P^2 = \overline{U} \cup (\mathbb{C}P^2 \setminus \mathrm{Int}\, U)$

(注) $U \sim F_0$ の blowing up resolution
$\mathbb{C}P^2 \setminus \mathrm{Int}\, U \sim$ Milnor fibre

補題 $H^2_{DR}(\mathbb{C}P^2 \setminus \mathrm{Int}\, U) \longrightarrow H^2(\partial U)$ は全射

(注) U : E_ω の管状近傍, $\overline{U} \underset{h.eq.}{\simeq} E_\omega$, $\partial U \cong N' = Nil^3(-9)$, $H^2(\partial U ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/9$

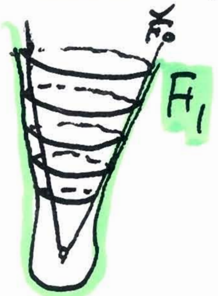
(∵) $H^2_{DR}(\overline{U}) \oplus H^2_{DR}(\mathbb{C}P^2 \setminus \mathrm{Int}\, U) \longrightarrow H^2_{DR}(\partial U) \xrightarrow{\delta} H^3_{DR}(\mathbb{C}P^2) = 0$

$$\begin{array}{ccc} H^2_{DR}(\overline{U}) & \longrightarrow & H^2_{DR}(\partial U) \quad : \ 0\text{-map} \ // \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ H^2_{DR}(E_\omega) & & H^1_{DR}(E_\omega) \hat{\otimes} H^1(S^1) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

End-periodic symplectic form の構成

（再び $F_1 \subset \mathbb{C}^3$ に戻る）.

End の symplectic str. の安定性. $\Longrightarrow$ $^\exists \beta_1$ $(\approx \beta^*|_{F_1})$: F_1 上の sympl. str.



s.t. $\beta_1|_{End} = d(e^\tau \xi_N)$

$= e^\tau d\tau \wedge \xi_N + \dfrac{3e^\tau}{2\pi} dx \wedge dy$

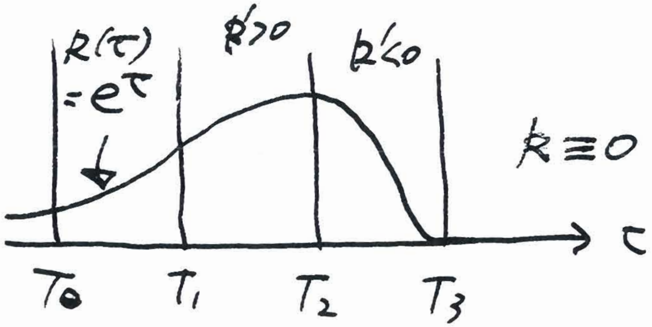
種 : $^\exists \kappa|_{End} = dy \wedge \xi_N$

補題 $^\exists \mu$: $0 < \mu \ll 1$, $\beta_1 + \mu\kappa$: F_1 上の symplectic str.

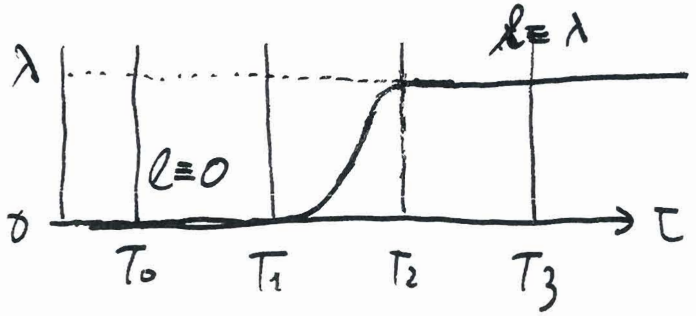
㊀ $F_1 = \underset{\text{cpt.}}{\text{Core}} \cup \underset{\text{end.}}{([T_0, +\infty) \times N)}$ end 上 $\left| \begin{array}{l} \beta_1 \wedge \kappa = 0. \\ \beta_1 \wedge d\tau \wedge dx = 0. \end{array} \right.$

以下 end $[T_0, +\infty) \times N$ 上で β_1 を改変する。

End-periodic symplectic form の構成（続）（β_1 の改変）



$k \equiv 0$: $k(\tau)$ のグラフ



: $l(\tau)$ のグラフ

$$\beta_{\#} = \begin{cases} \beta_1 & \text{on compact core of } F_1 \\ d(k(\tau)\zeta) + l(\tau)\,d\tau \wedge dx & \text{on } [T_0,\infty)\times N \end{cases}$$

$$\beta_{\lambda,\mu} = \beta_{\#} + \mu\kappa$$

$$\beta_{\lambda,\mu}\Big|_{[T_0,\infty)\times N} = k'(\tau)\,d\tau\wedge\zeta + \frac{3k(\tau)}{2\pi}\,dx\wedge dy + l(\tau)\,d\tau\wedge dx + \mu\, dy\wedge\zeta_N$$

$$(\beta_{\lambda,\mu})^2 = \left(\frac{3k'(\tau)k(\tau)}{2\cdot\tau} + 2\,l(\tau)\cdot\mu\right) d\tau\wedge dx\wedge dy\wedge\zeta_N$$

$$\lambda > \max -\frac{3k'(\tau)\cdot k(\tau)}{4\pi\mu}$$ ととれば良い

"End-periodic symplectic str. を許容する(しない) Stein 多様体、大域的凸 sympl. 多様体"

- End-periodicity & monodromy
- Trivial monodromy case

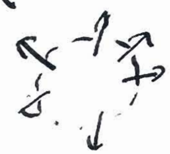
Thm (Friedl-Vidussi, Taubes 予想)

> $M^3 \times S^1$ が symplectic 構造を許容する。 $\Leftrightarrow$ $\Sigma_g \hookrightarrow M^3 \to S^1$

__Fermat 4次曲面__ : 特異点の link = Σ_3 上 $c_1 = -4$ の $U(1)$-束.

__$\tilde{E}_7, \tilde{E}_8$__ : link = T^2 上の, euler数 < 0 となる Seifert 束.

__自明な例__ : $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$. (Stein で 凸 だが…. $\mathbb{H}$ は 凹 である….)

symplectic 多様体としては  = 

__高次元では?__ $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots$ $S^{2n-1} \times S^1$: symplectic?

大域的凸 symplectic 多様体

(Wein) Stein 多様体 W : $\exists \phi$: 狭義多重劣調和関数 (spsh) かつ 下に有界な proper Morse 関数.

$\omega = -dJ^* d\phi$: symplectic, $\omega(\cdot, J\cdot)$: Riemann 計量.

$\lambda^* = -J^* d\phi$: Liouville 形式. $Z := \operatorname{grad} \phi$,

$\omega = d\lambda^*$, $\iota_Z \omega = \lambda^*$, Z の forward orbit は proper.

大域的凸 symplectic 多様体 : ω, λ^*, Z.

例 M^3 が Anosov flow を許容すれば $W = \mathbb{R} \times M^3$ は大域的凸

(注). $\mathbb{R} \times M^3$ の end は不連結, $W = \mathbb{R} \times M^3$ の homotopy 型は3次元, 従って W は Stein でない. (Lefschetz の定理)

ある意味で自明な, end-periodic symplectic str. を許容する大域的凸 symplectic 多様体.

$W = \mathbb{R} \times M^3$, 例 $M^3 = \text{Solv.}$ ($\downarrow S^1$), hyperbolic T^2-auto e.g. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 一般に M^3 ($\downarrow S^1$) pseudo-Anosov, Anosov flow を許容するものが存在する.